

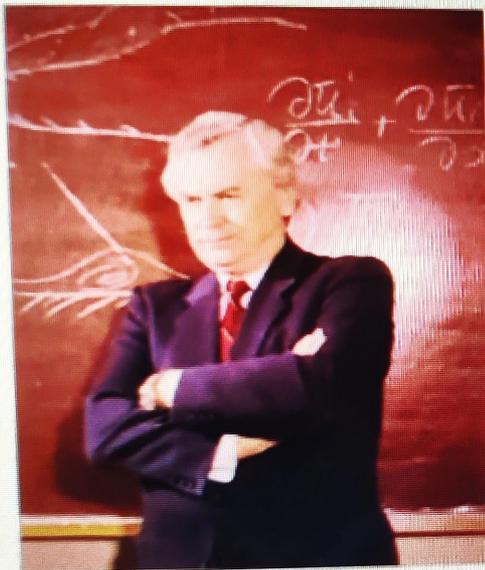
# Компьютерное моделирование динамических процессов в неоднородных деформируемых средах

Чл.-корр. РАН

Петров И.Б

«Мы подобны карликам, усевшимся на плечах великанов;  
мы видим больше и дальше, чем они, не потому,  
что обладаем лучшим зрением, и не потому, что выше их, но потому,

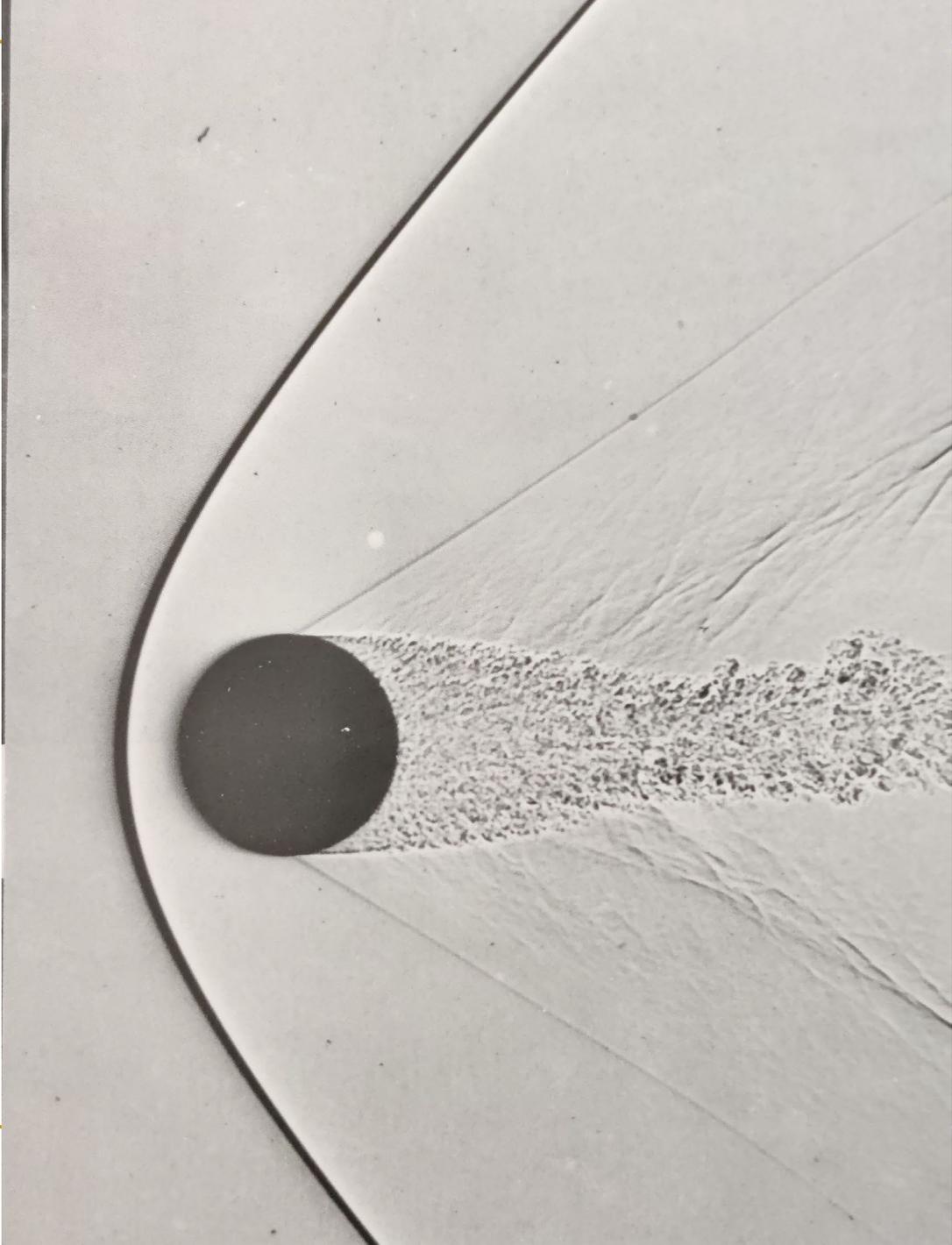
**что они нас подняли и увеличили наш рост  
собственным величием...»**



**Бернар Шартрский** (1070—1130) французский философ-платоник,  
представитель шартрской философской школы

(в изложении **Иоанна Солсберийского** (1120-1180) англо-французский богослов, схоластик, писатель, педагог, епископ Шартра.)





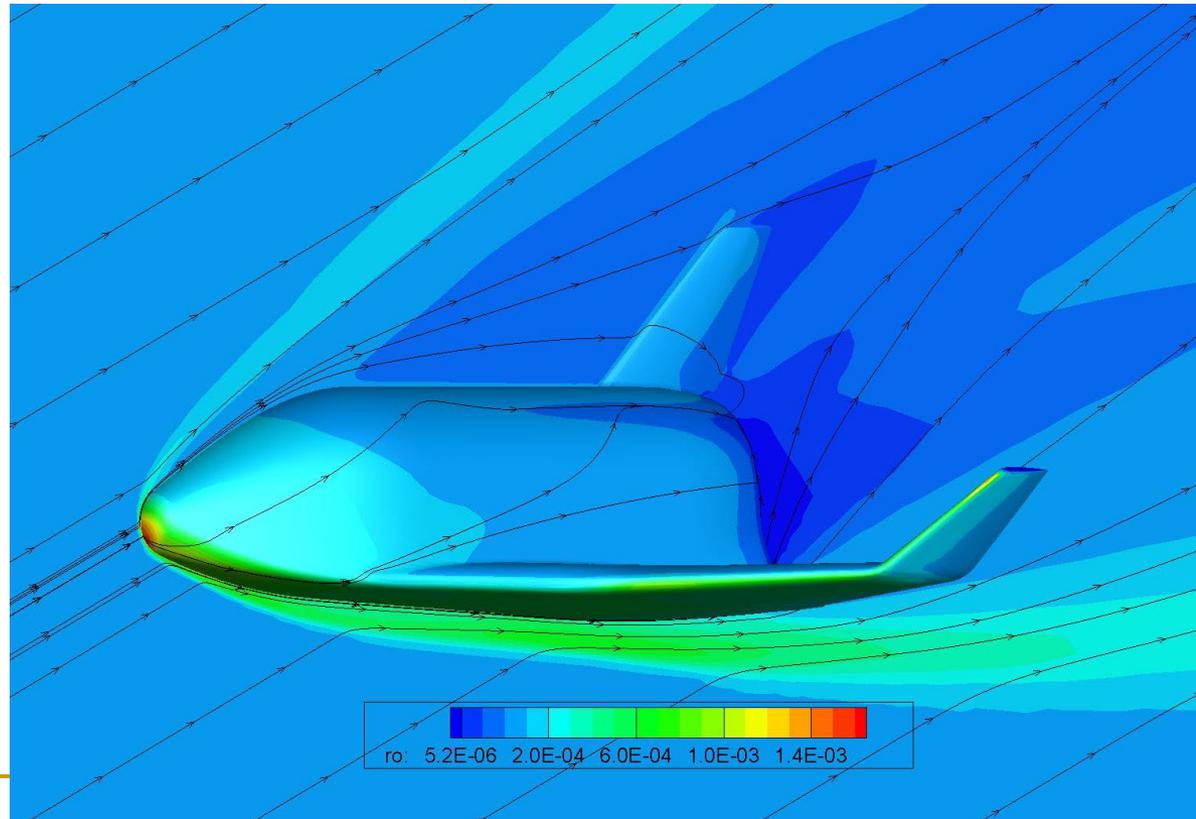
# Задачи внешней аэродинамики

Расчёт течения вокруг аппарата, летящего в атмосфере с большой сверхзвуковой скоростью.

● Геометрия тела: возвращаемый космический аппарат ЦАГИ

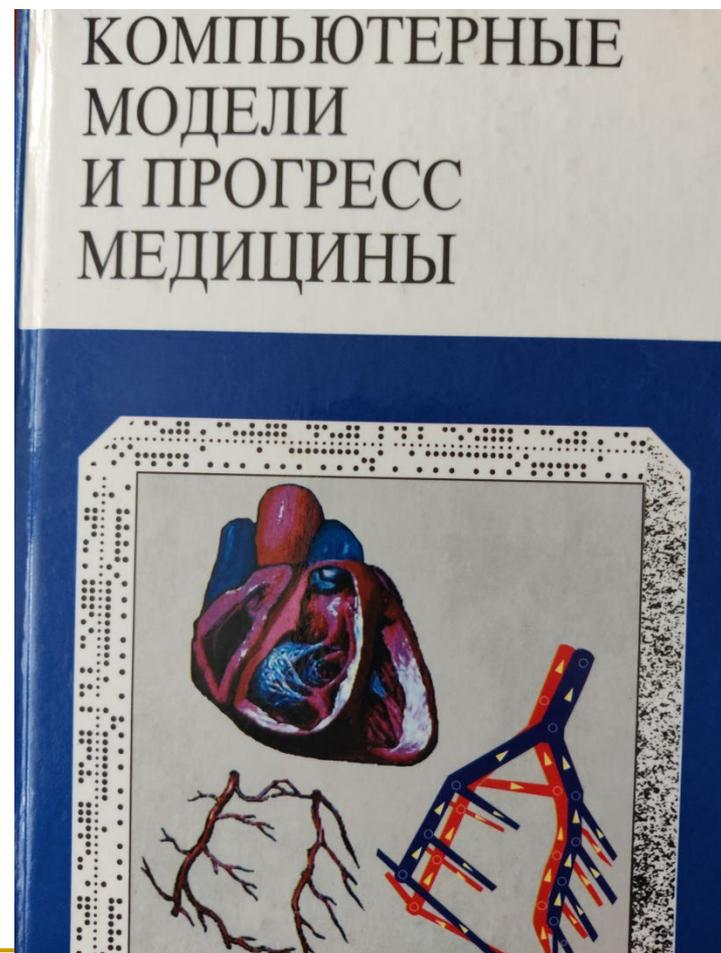
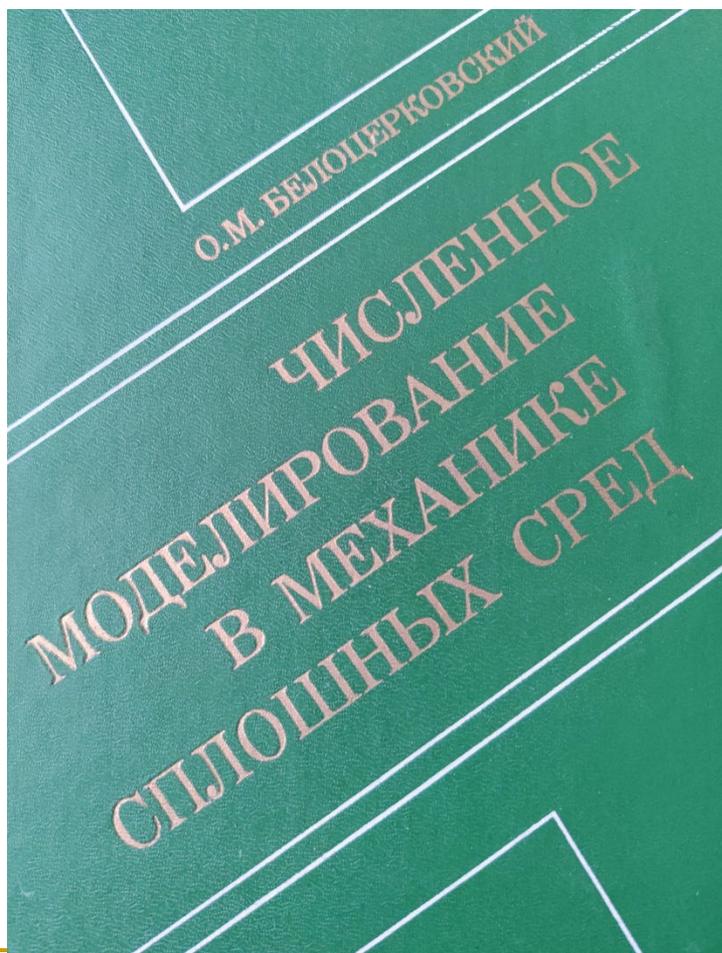
● Входные данные:

- Высота 70 км
- Число Маха 25
- угол атаки 25 градусов

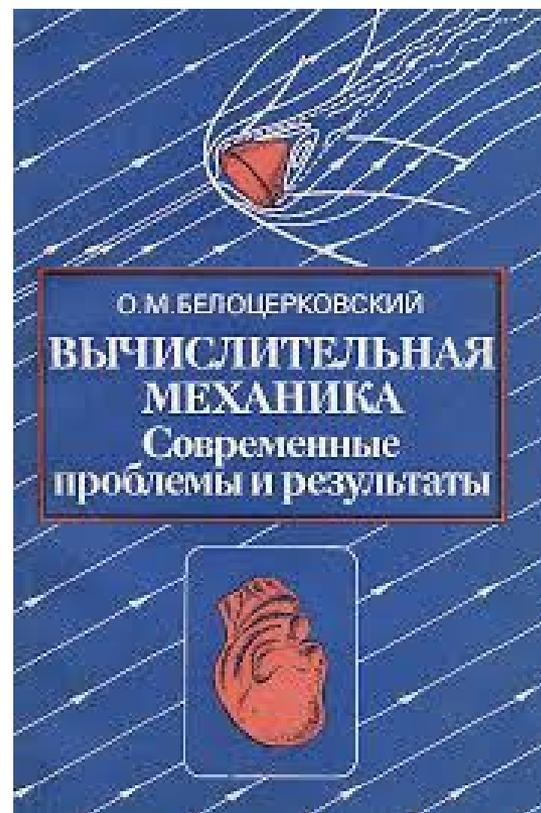


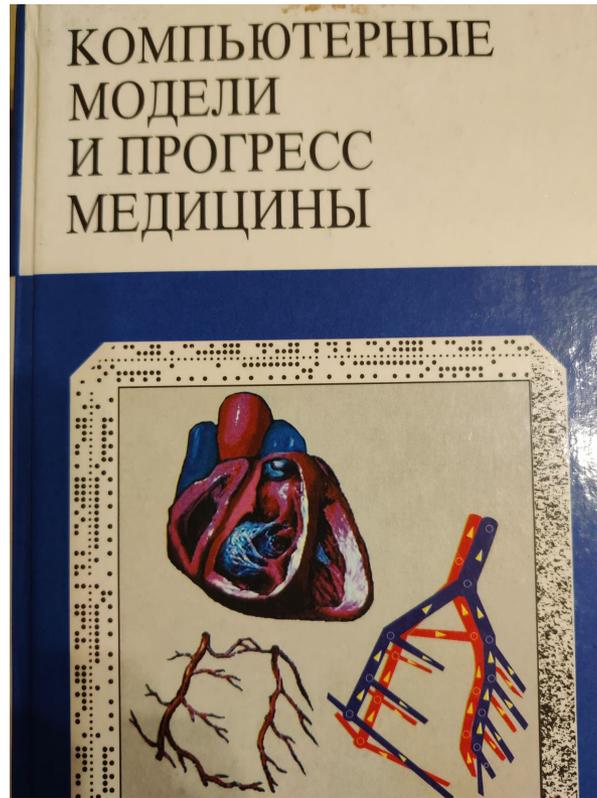
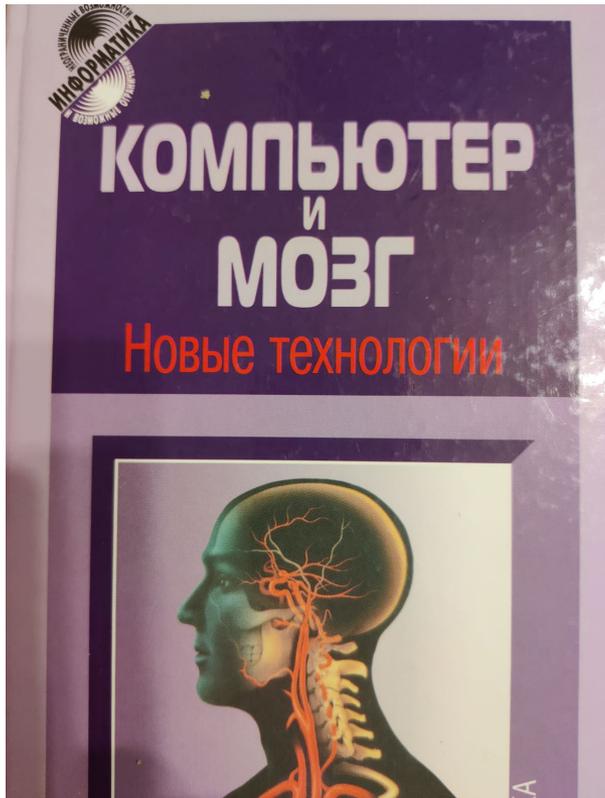
*Цветом показана плотность, линиями – траектории частиц*

# Научный и жизненный путь академика О.М. Белоцерковского



# Научный и жизненный путь академика О.М. Белоцерковского





# История развития семейства СХМ

СХМ для многомерных гиперболических уравнений (Магомедов, Холодов, ЖВМ, 1968)

СХМ на криволинейных и подвижных сетках(Петров, Холодов, ЖВМ, 1984).

Первый гибридный СХМ (Петров, Холодов, ЖВМ, 1984; Петров, Хохлов).

Квазилинейных СХМ в пространстве неопр. коэфф.(Холодов, 1978).

Консервативный СХМ, в виде МКО (метода потоков , интегро-интерполяционного метода) (Холодов, Уткин, Холодов, М: МФТИ, 2015)

СХМ на нерегулярных сетках(Петров, Фаворская, Муратов, Санников, ЖВМ, 2014; Васюков).

Комбинированный СХМ, совместно с методом гладких частиц(Петров, Васюков, Ермаков, Потапов, Фаворская, Шевцов, ЖВМ, 2014).

Иерархические сетки (Петров, Фаворская, Хохлов, ЖВМ, 2017).

Комбинированный СХМ с разр. методом Галеркина(Петров, Фаворская, ДАН, 2022).

Химерные сетки (Хохлов, Фаворская, Стецюк, Митьковец, Journal of Computational Physics, 2021).

Параллелизация (Хохлов; Фаворская, Хохлов, Саган, Подлесных, Lecture Notes in Computer Science, 2022).

СХС высокого порядка, до 5-го(Петров, Голубев, Гусева, 2022).

---

# Численное моделирование в медицине

---

---

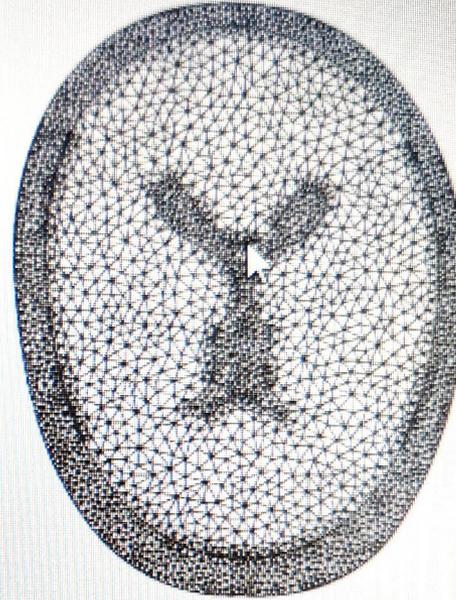
# Задачи

- Черепно-мозговая травма
  - Транскраниальный ультразвук
  - Удар по грудной клетке
  - Травма колена
  - Удаление катаракты
  - Удаление почечных камней
-

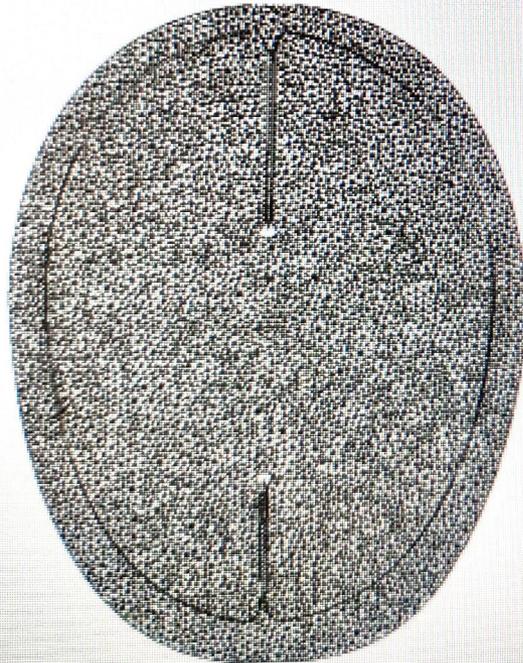
(a)



(b)

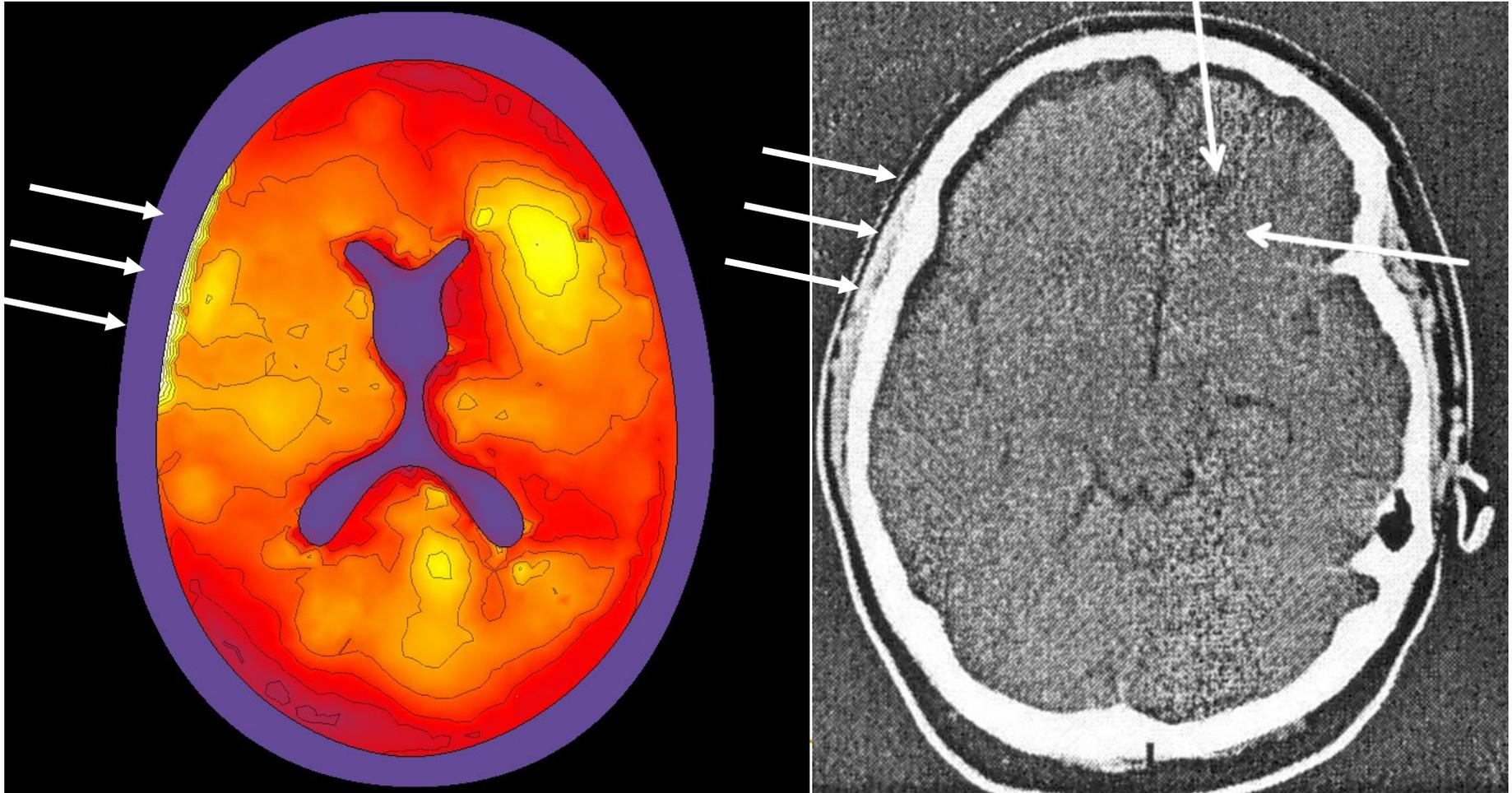


(c)



# Черепно-мозговая травма

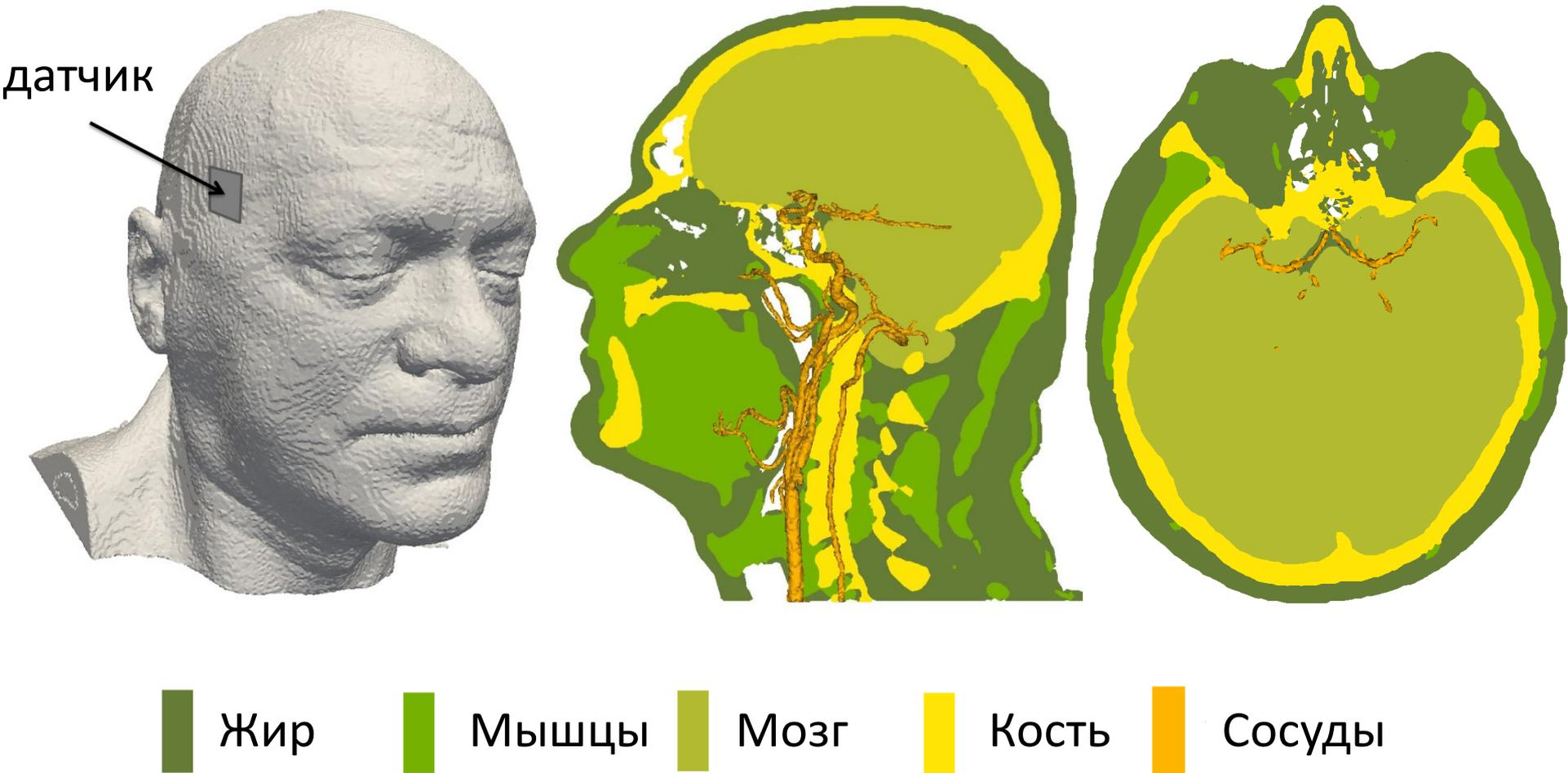
Результаты расчета и клинические данные





Давид и Голиаф

# Транскраниальное УЗИ

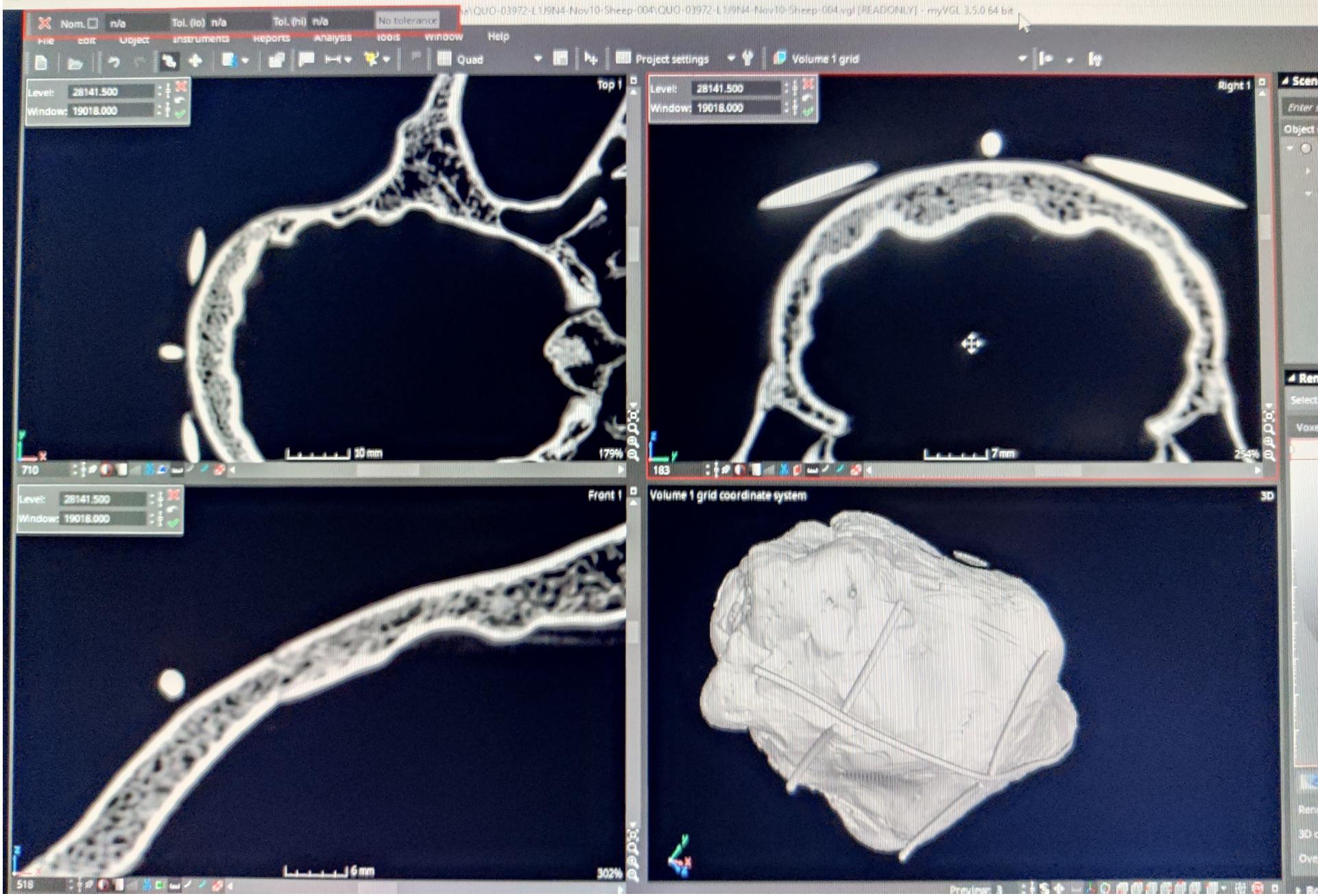


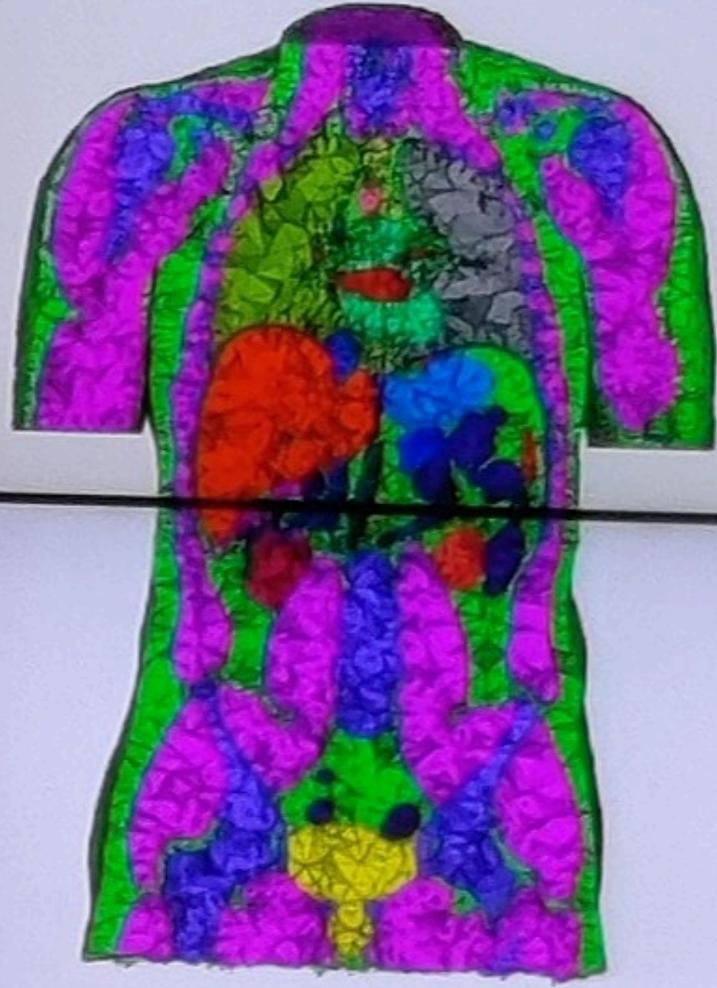
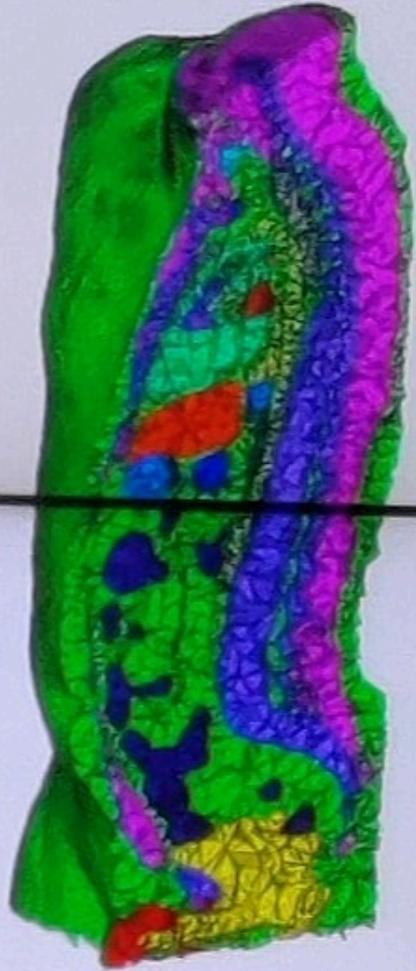
# Left temple strike, pressure





Figure 11. Maximal pressure observed on the cerebral blood vessels. Pressure units are kPa.



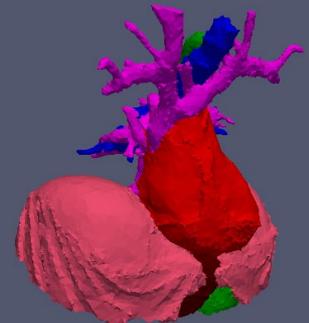
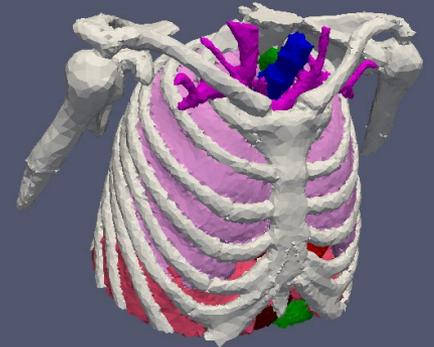
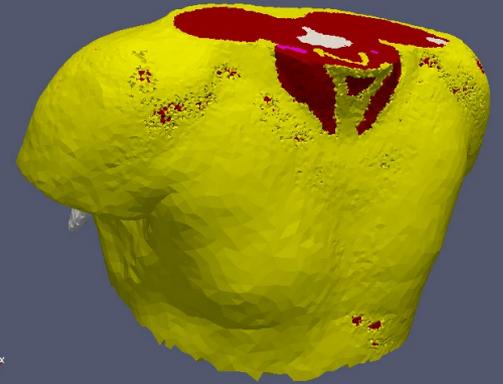


# Удар по грудной клетке

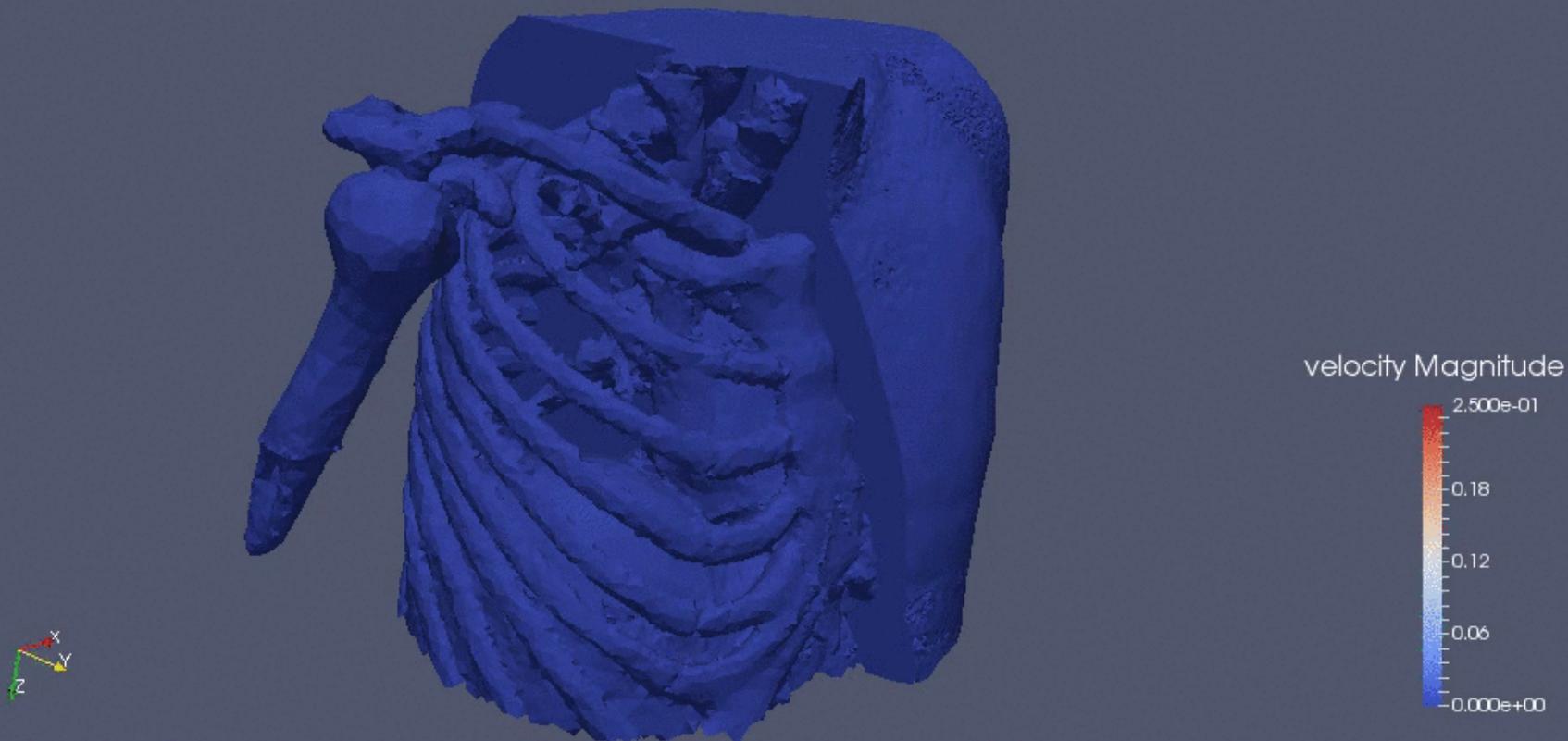
Расчетные сетки предоставлены научным коллективом под руководством Василевского Ю.В.

Ткани, рассмотренные в модели:

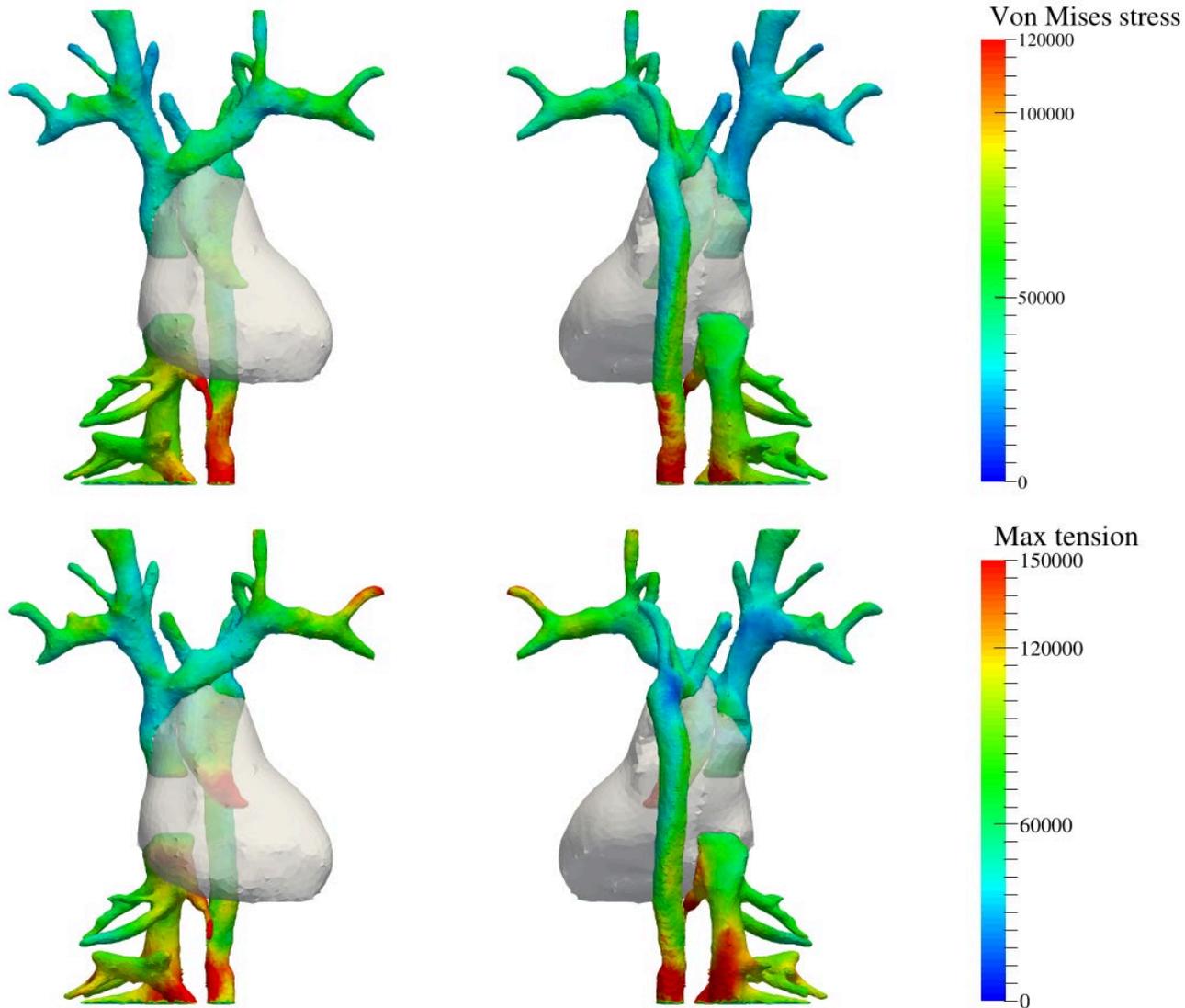
- Жир
- Мышцы
- Кость
- Диафрагма
- Печени
- ЖКТ
- Трахея
- Сердце и сосуды



# 3D: модуль скорости во всех тканях

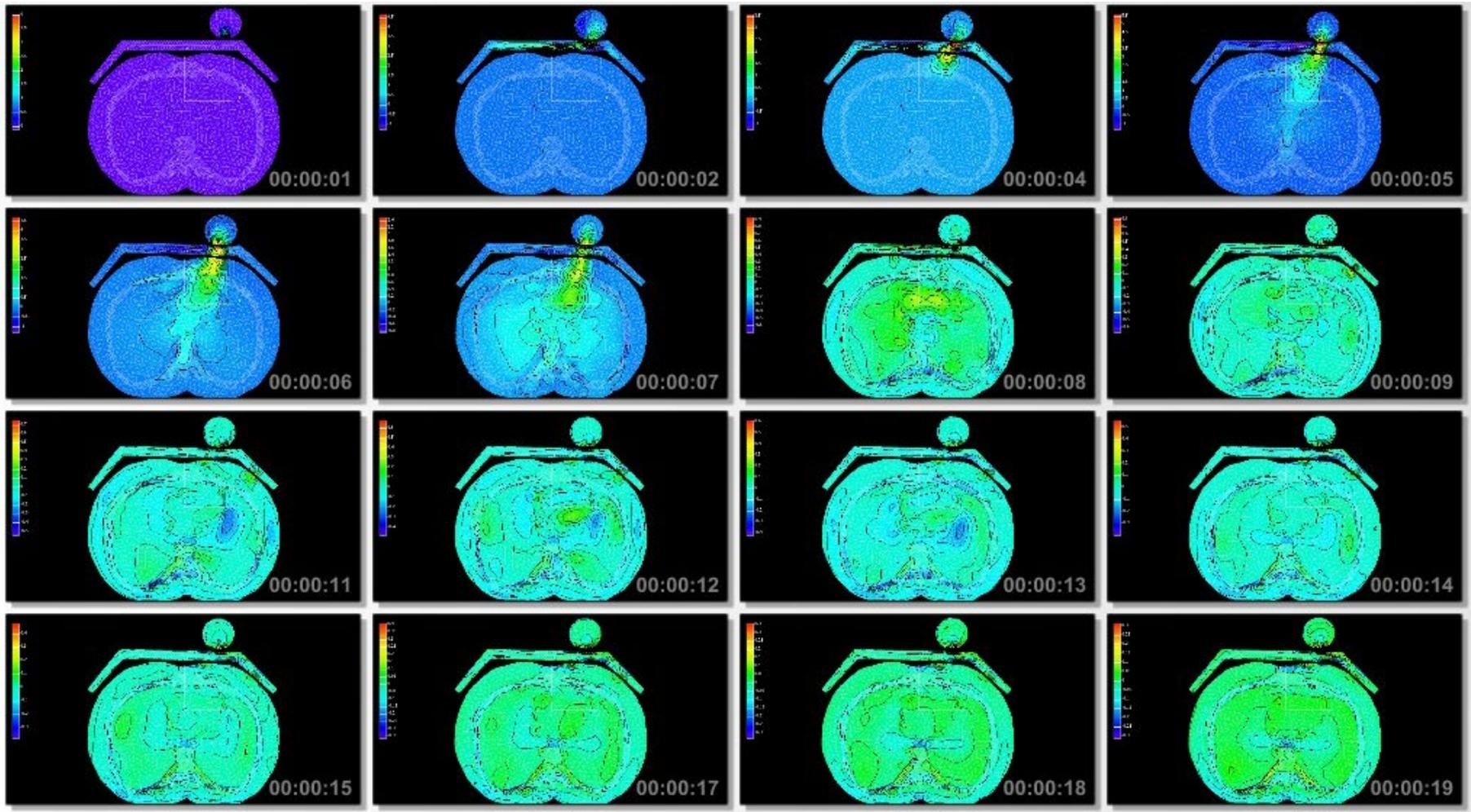


# Грудная клетка: результаты



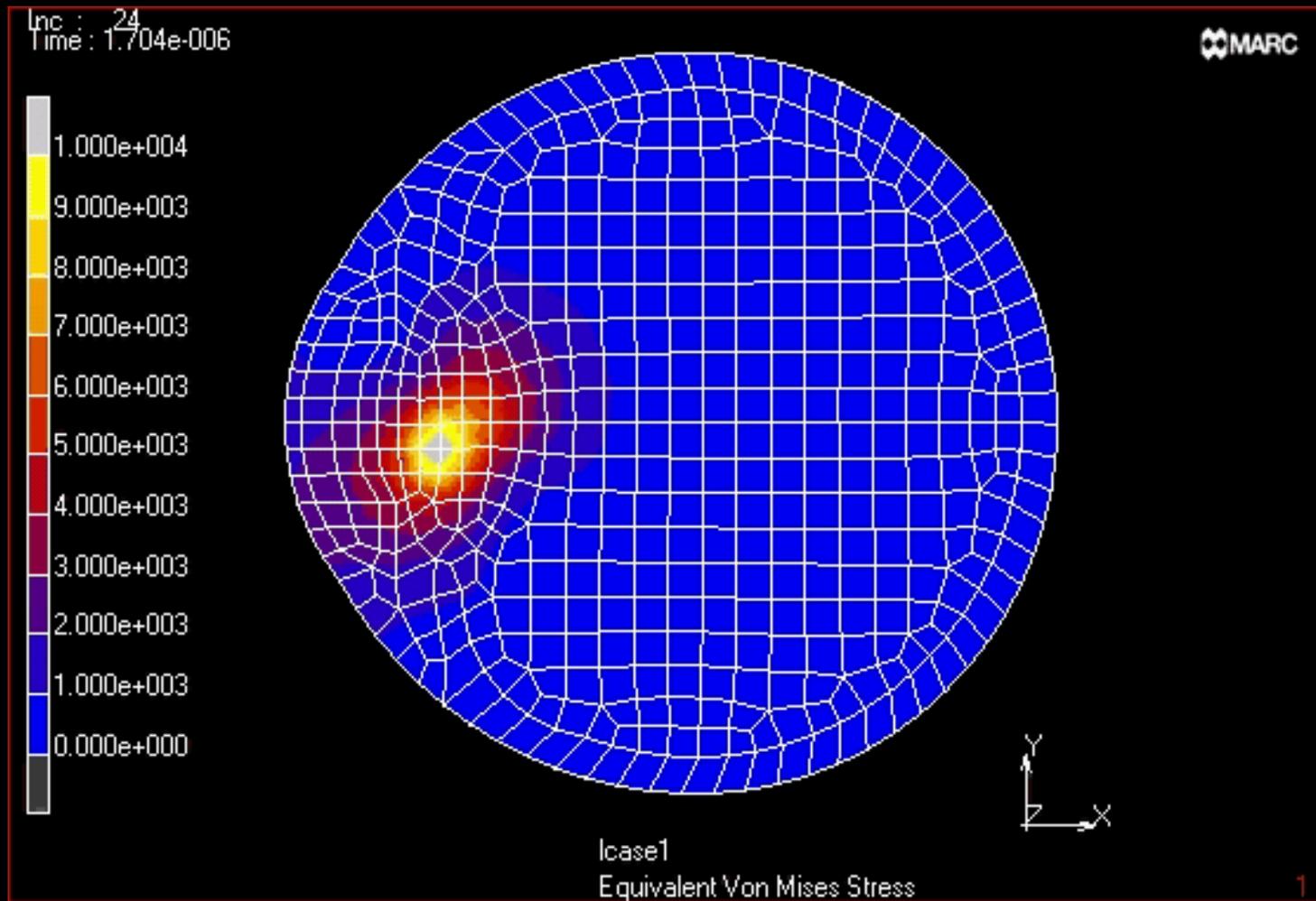


# Защитная конструкция



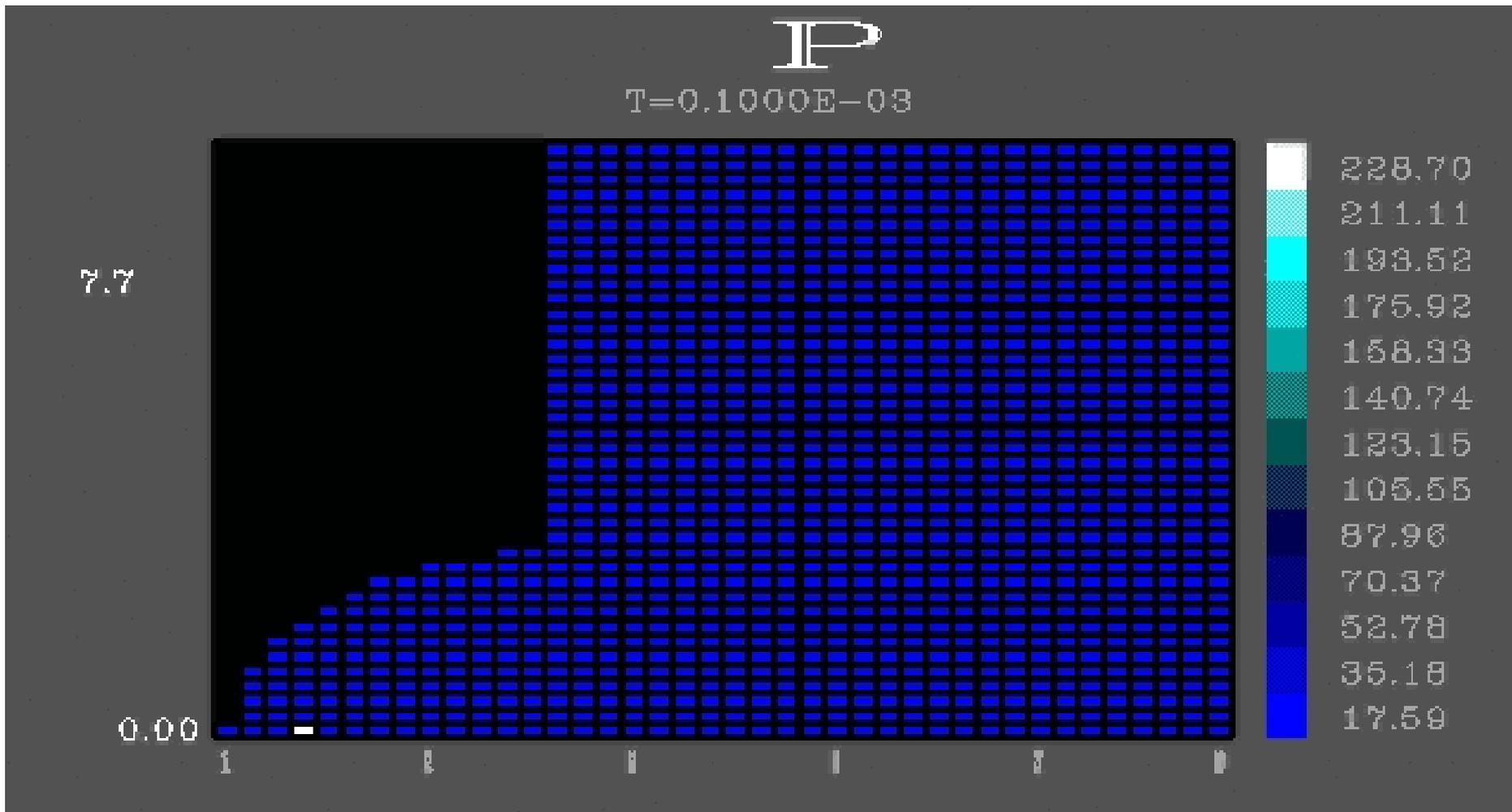
Геометрия, приближенная к реальной  
(отображен модуль скорости)

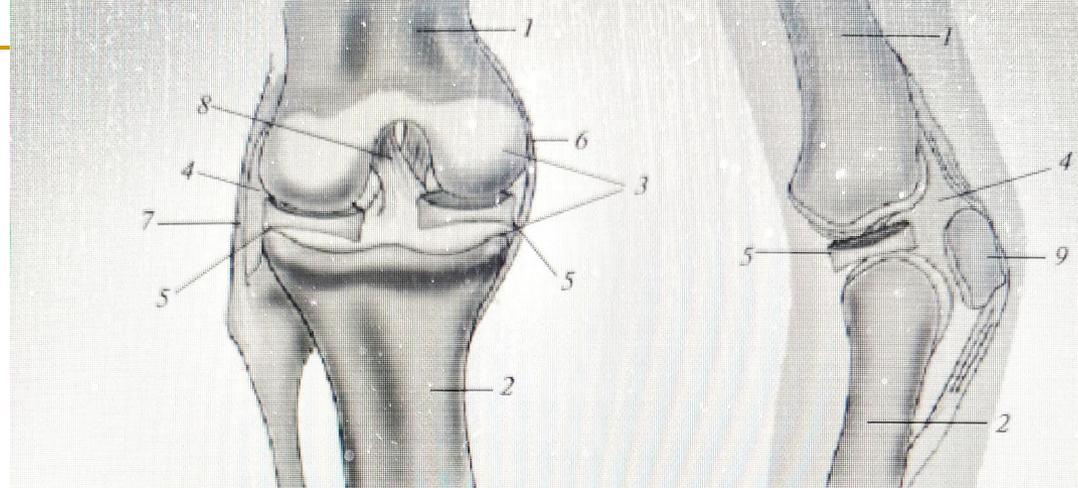
# Удаление катаракты



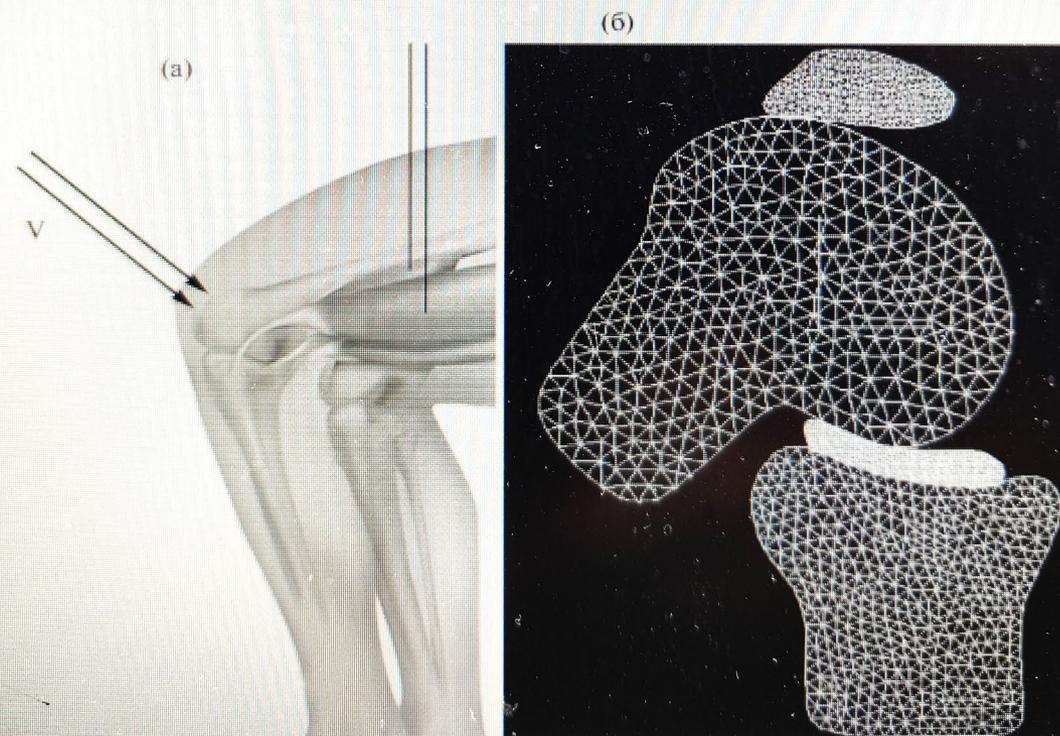
Ультразвуковой импульс. Напряжение Мизеса.

# Разрушение камня в почках

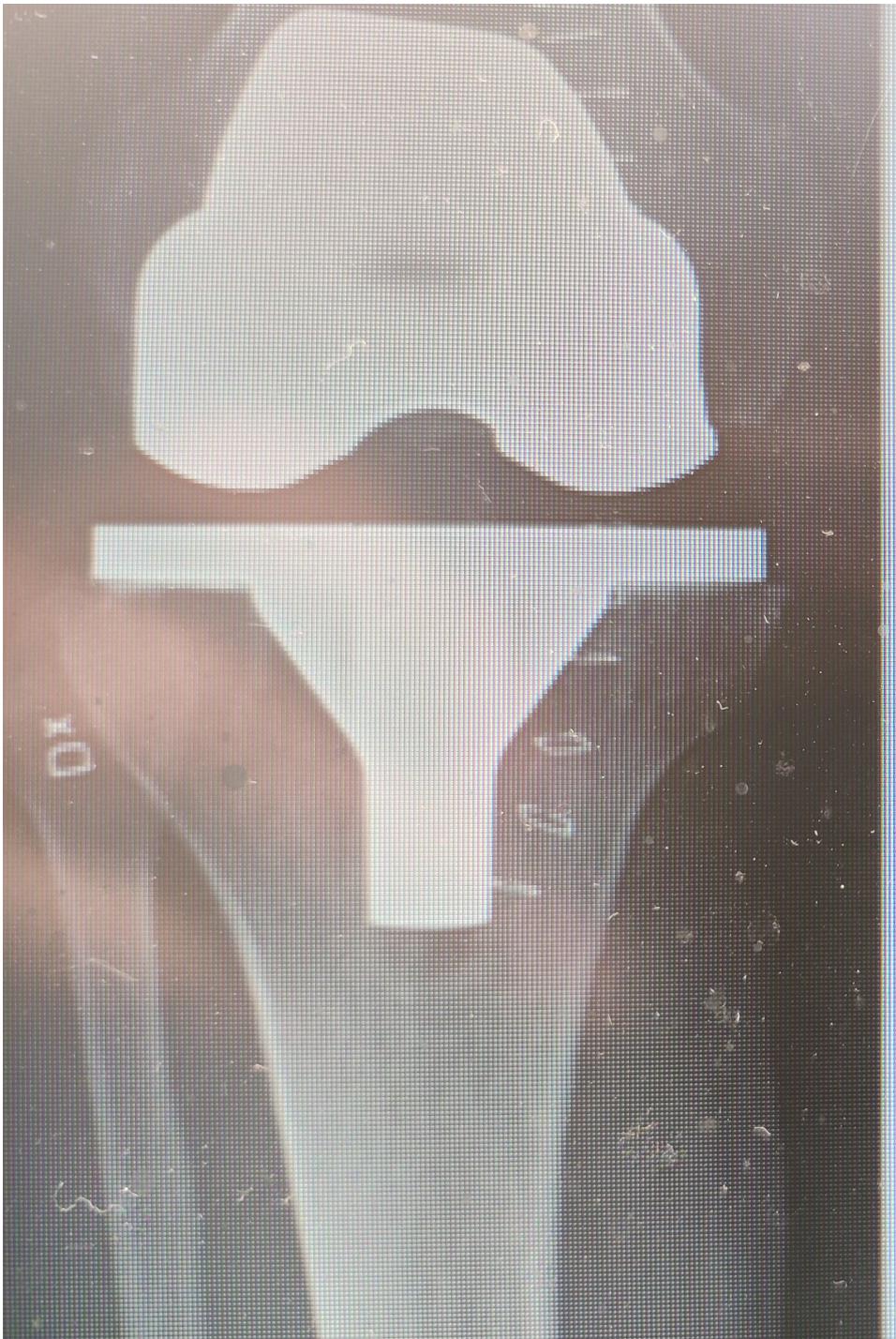


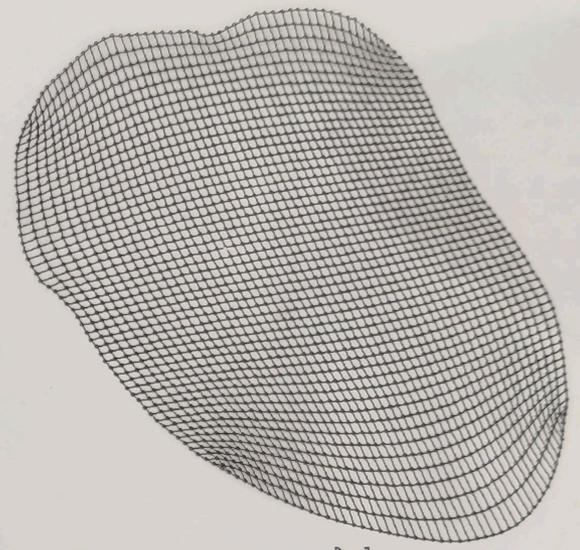
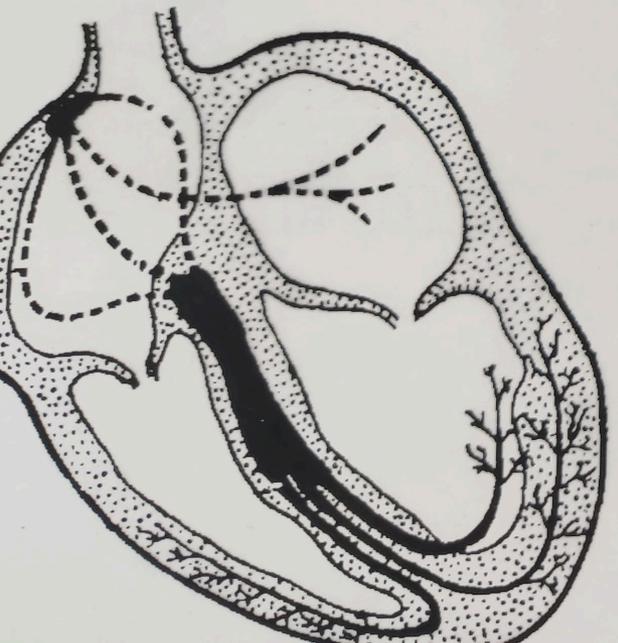
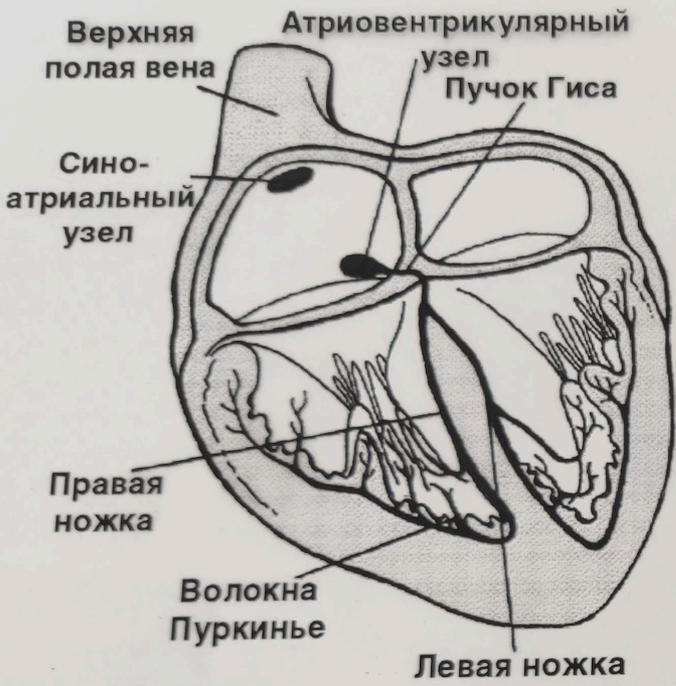


Фиг. 5. Строение коленного сустава: 1 – бедренная кость, 2 – большая берцовая кость, 3 – хрящи, 5 – задний и внешний мениски, 6 – внешняя связка, 7 – внутренняя связка, 8 – крестообразная связка, 9 – надколенник.

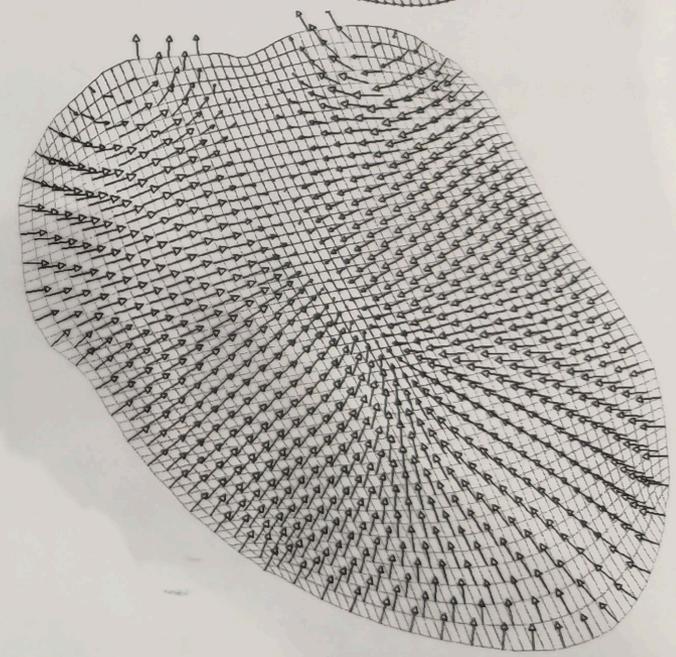


Фиг. 6. Согнутый коленный сустав, а – схема, б – расчетная сетка.





■	<math>-0.281367</math>
■	<math>-0.072344</math>
■	<math>-0.063361</math>
■	<math>-0.054268</math>
■	<math>-0.045215</math>
■	<math>-0.036172</math>
■	<math>-0.027129</math>
■	<math>-0.018086</math>
■	<math>-0.009043</math>
■	<math>0</math>



---

# Численное решение задач освоения Арктики

---



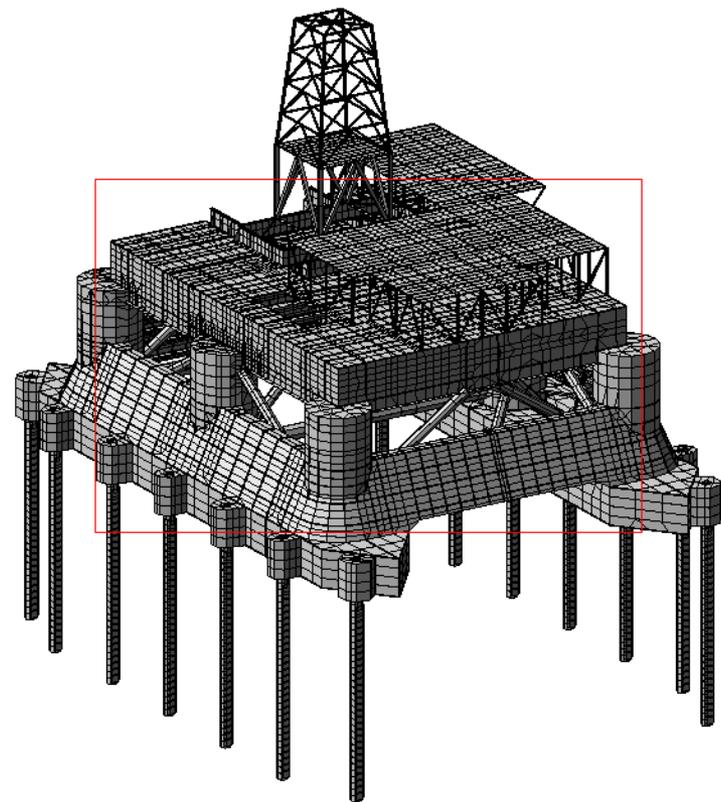
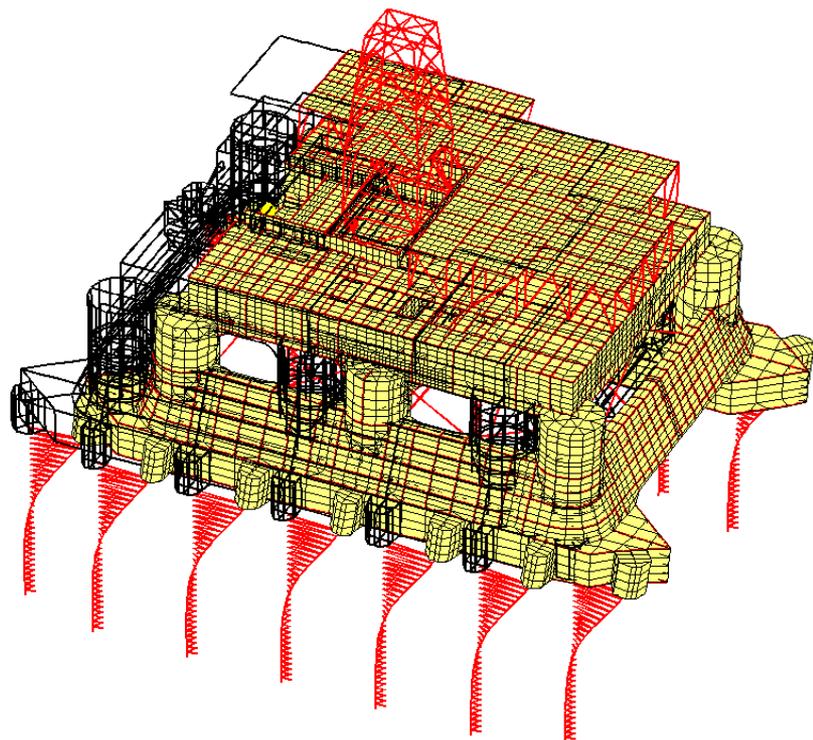
МЛСП «ПРИРАЗЛОМНАЯ»

МЛСП «ПРИРАЗЛОМНАЯ»

3

# Пример задачи о деформировании в многосвязной области интегрирования

## Морская ледостойкая стационарная платформа



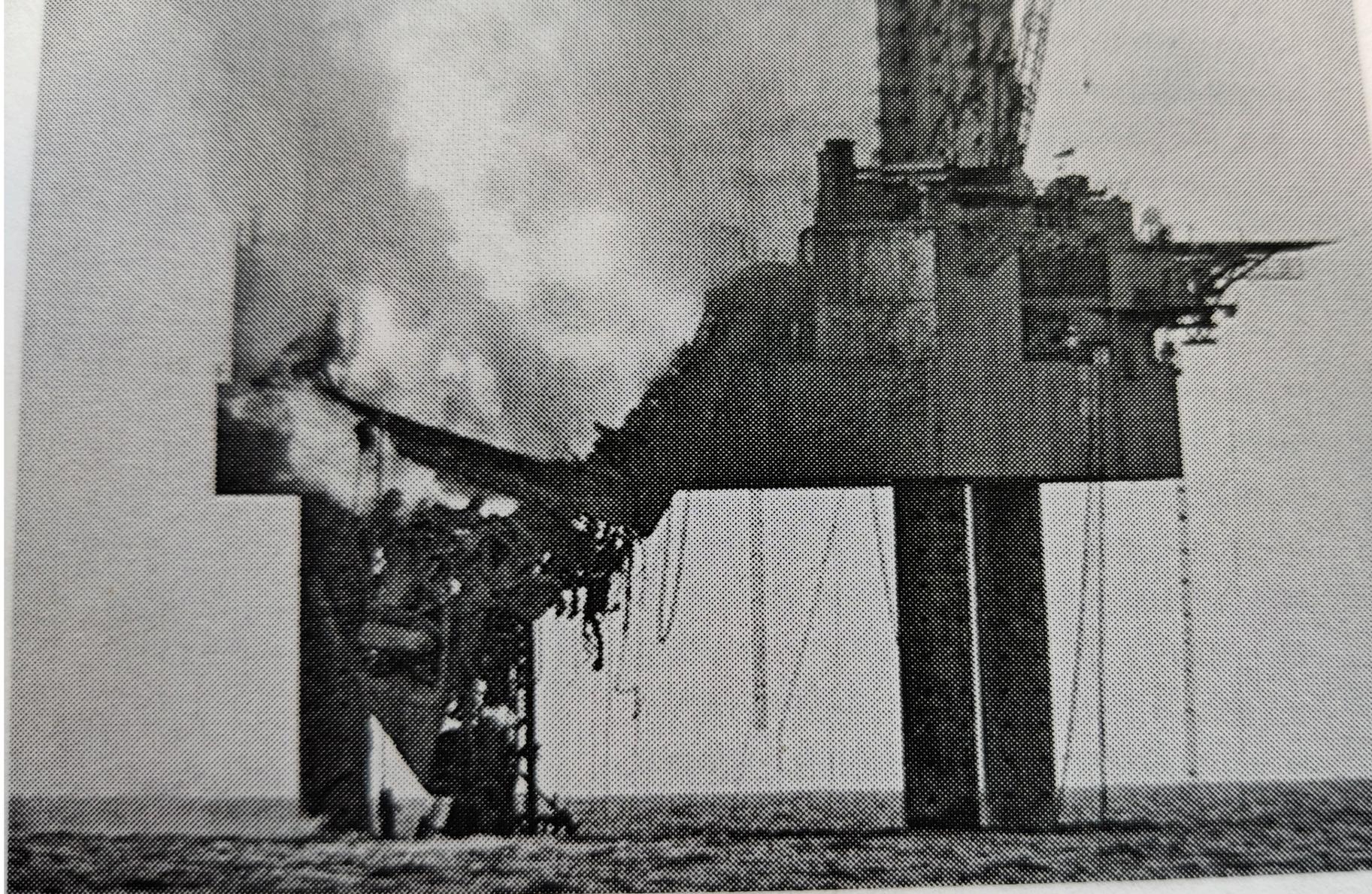
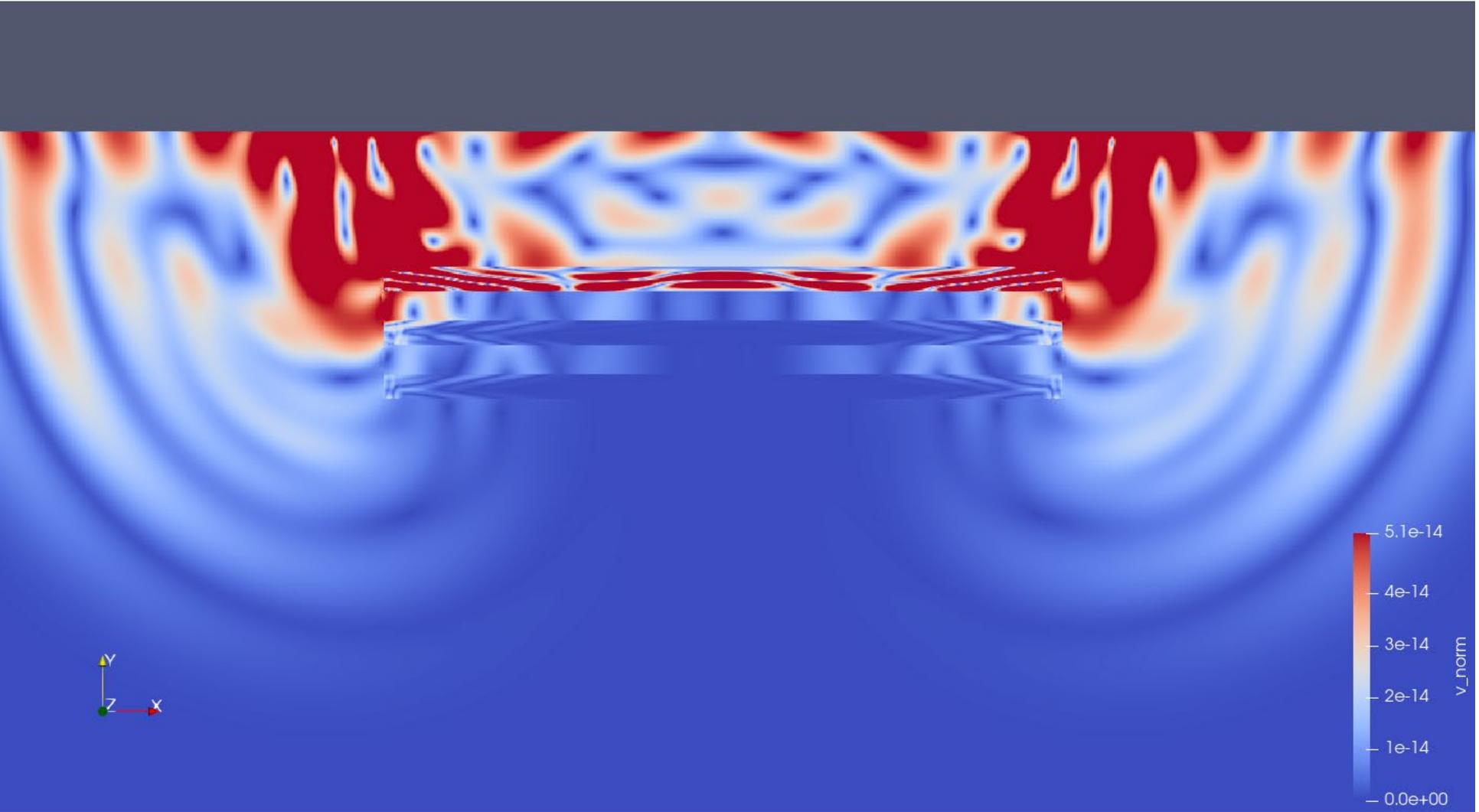
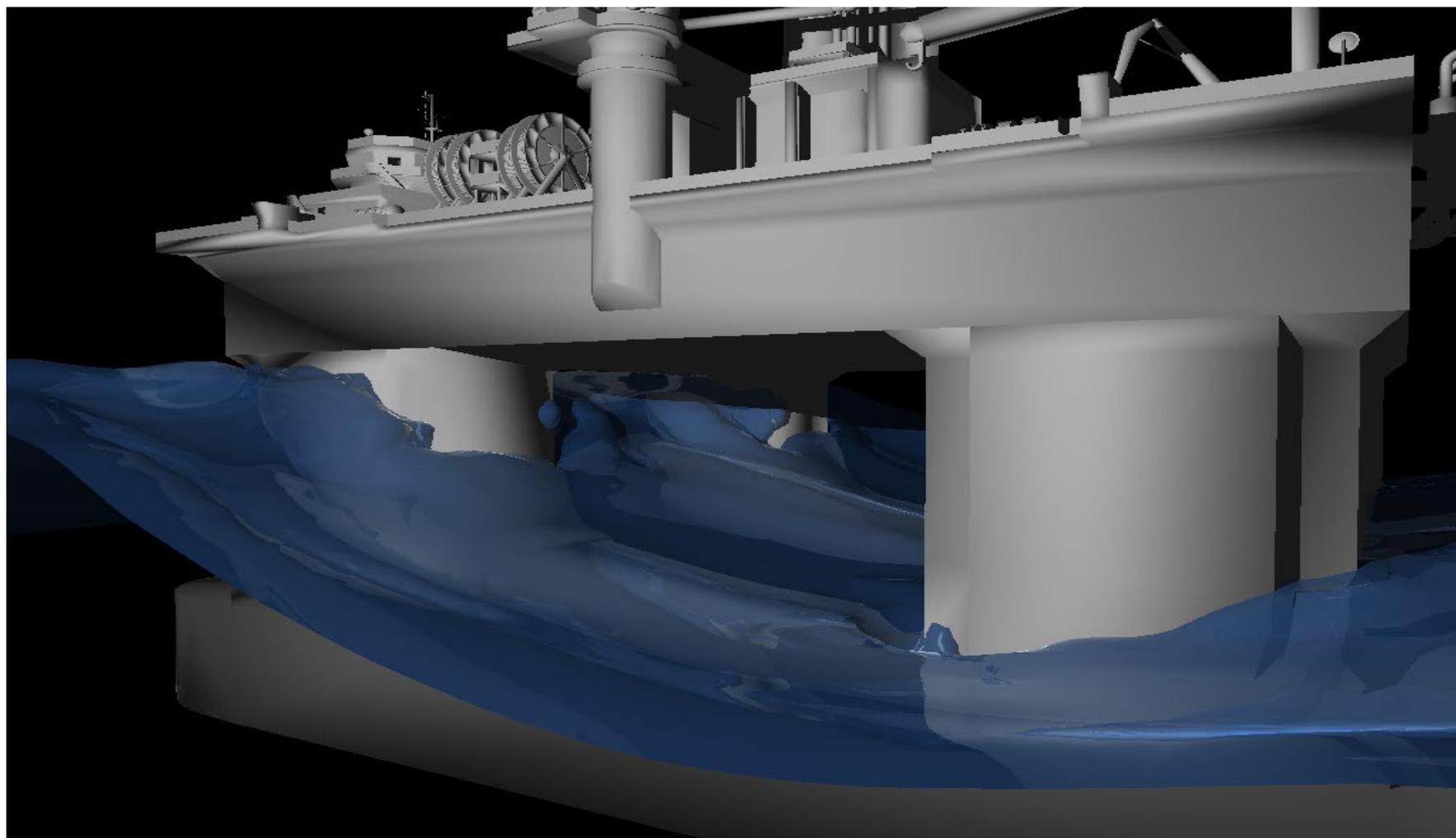
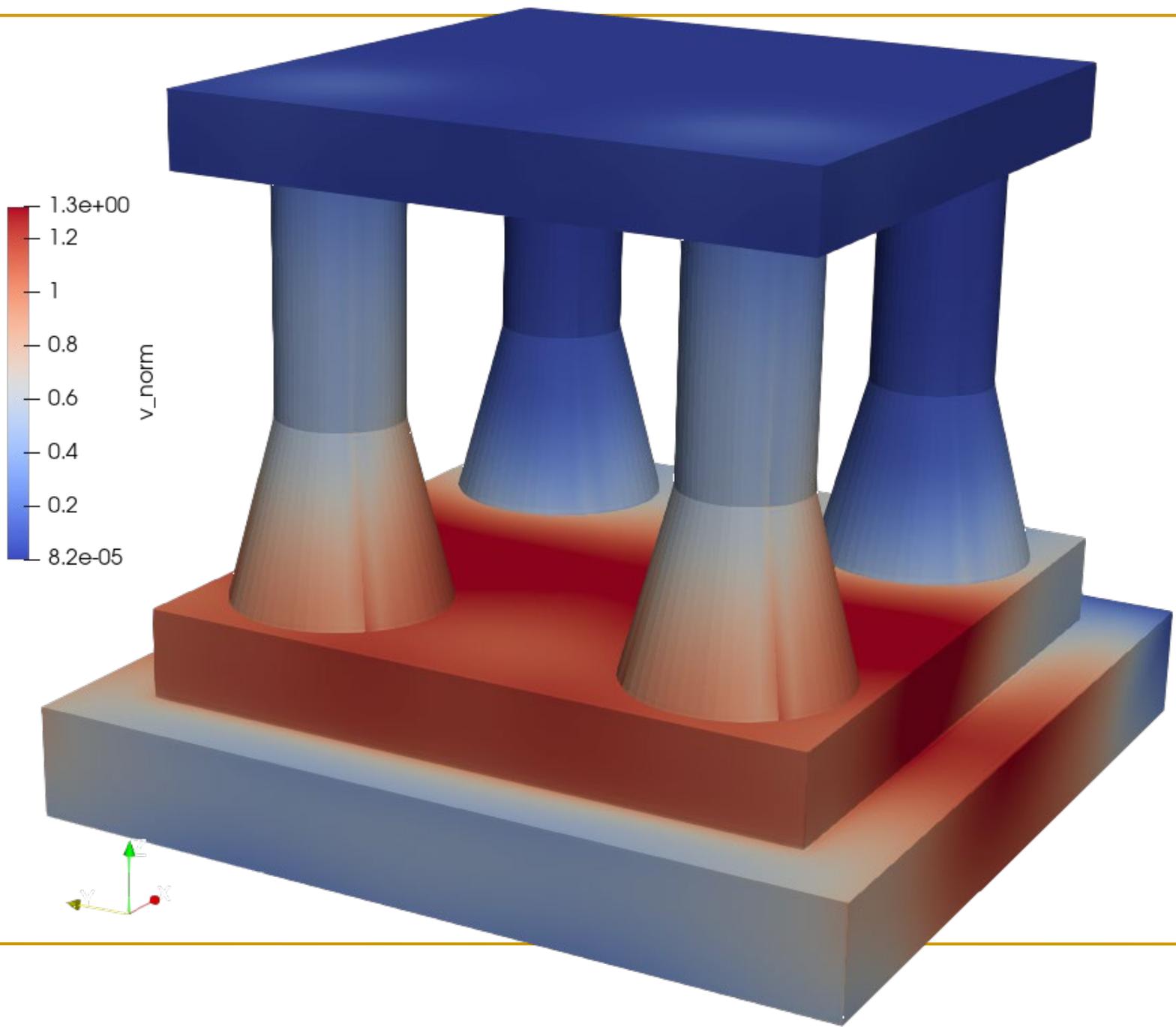


Рис. 4. Нефтегазовый промысел «Piper Alpha» на завершающей стадии пожара и гибели добычной платформы («Occidental Petroleum»)

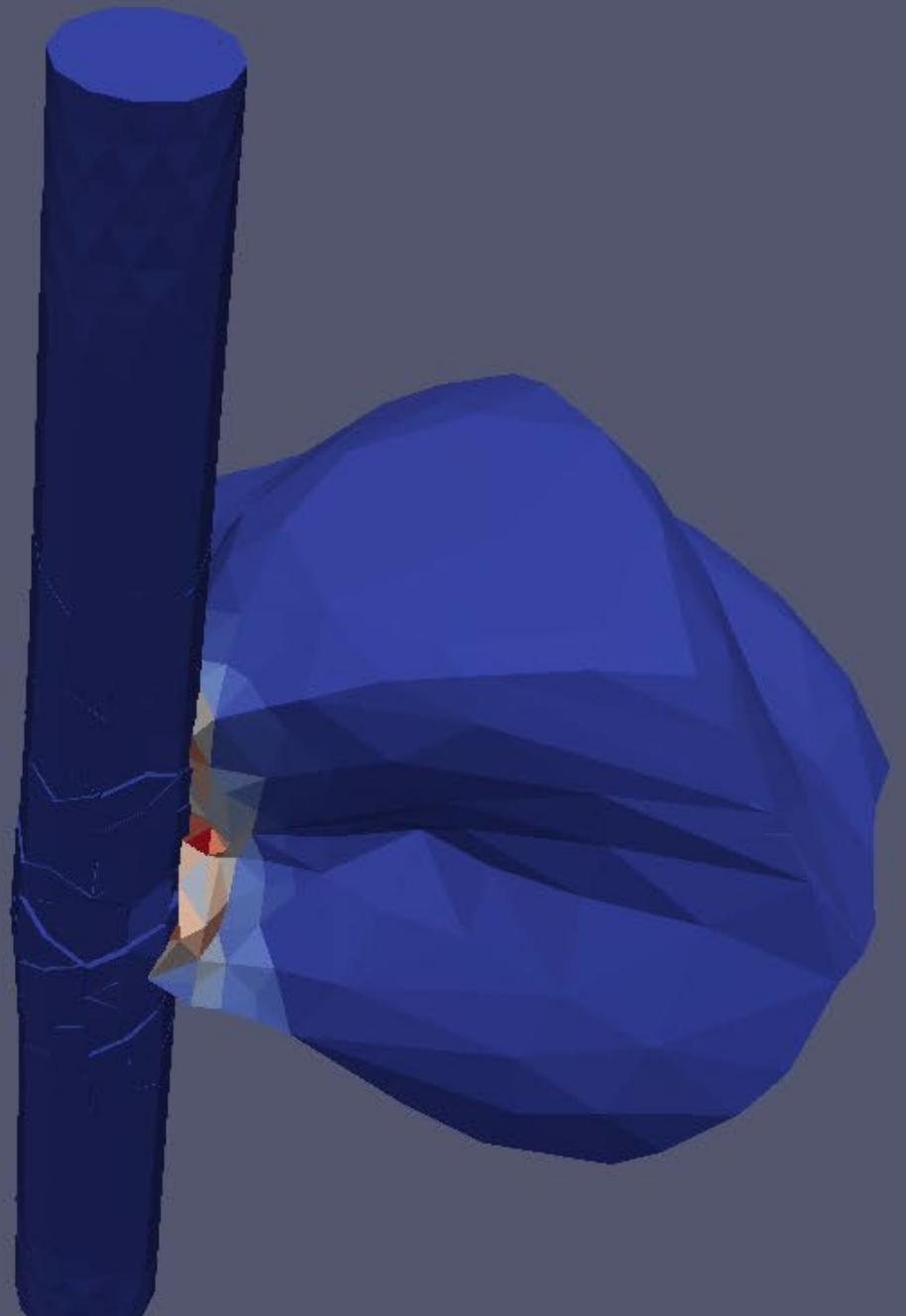


# Штормовое воздействие на ледостойкую платформу (ИВМ РАН)









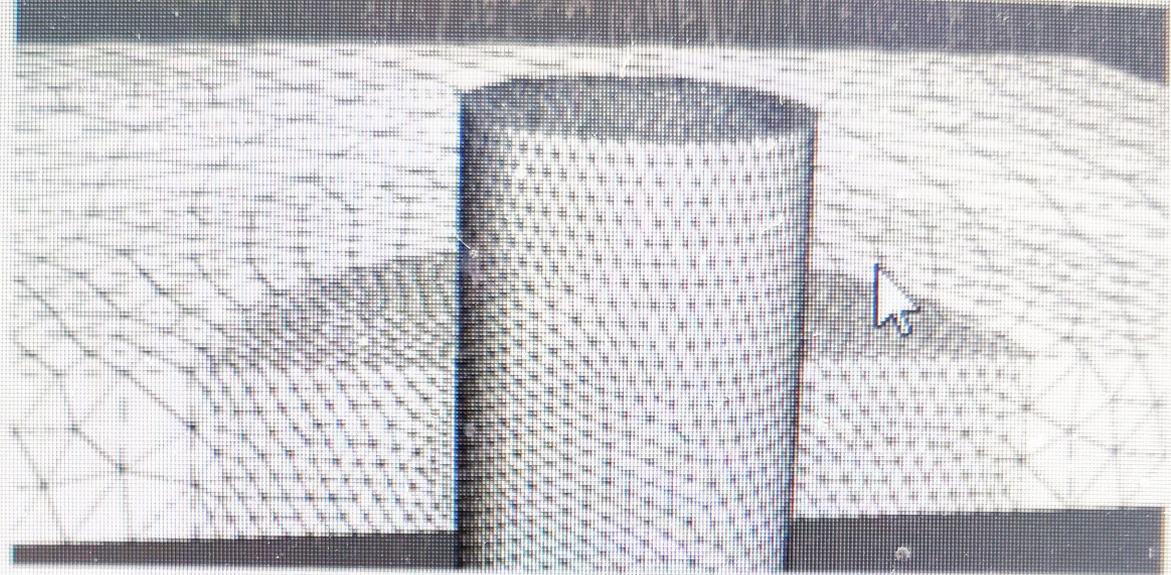
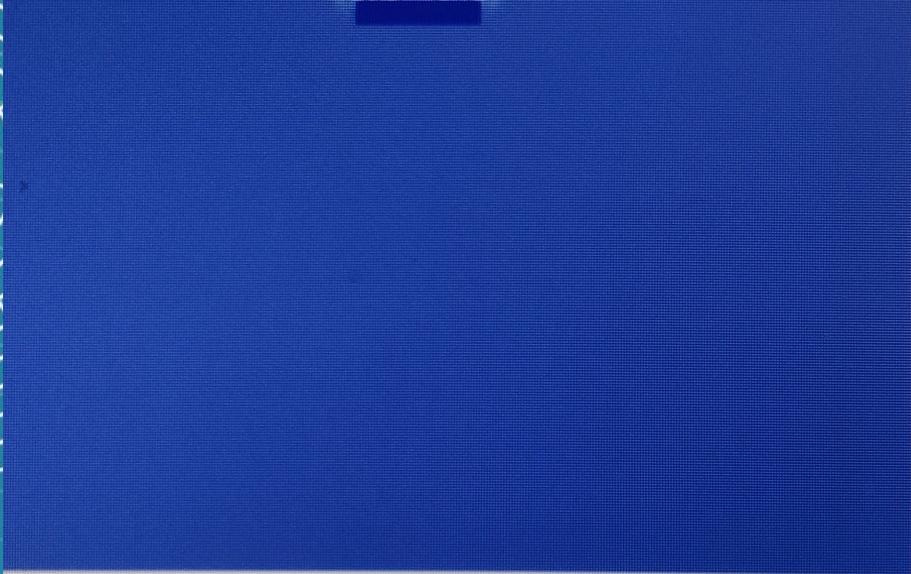


Fig. 4. Nonuniform computational mesh (offshore structure diameter  $D = 4$  m). Contact area.



Fig. 5. Pattern of ice floe destruction during collision with offshore structure.

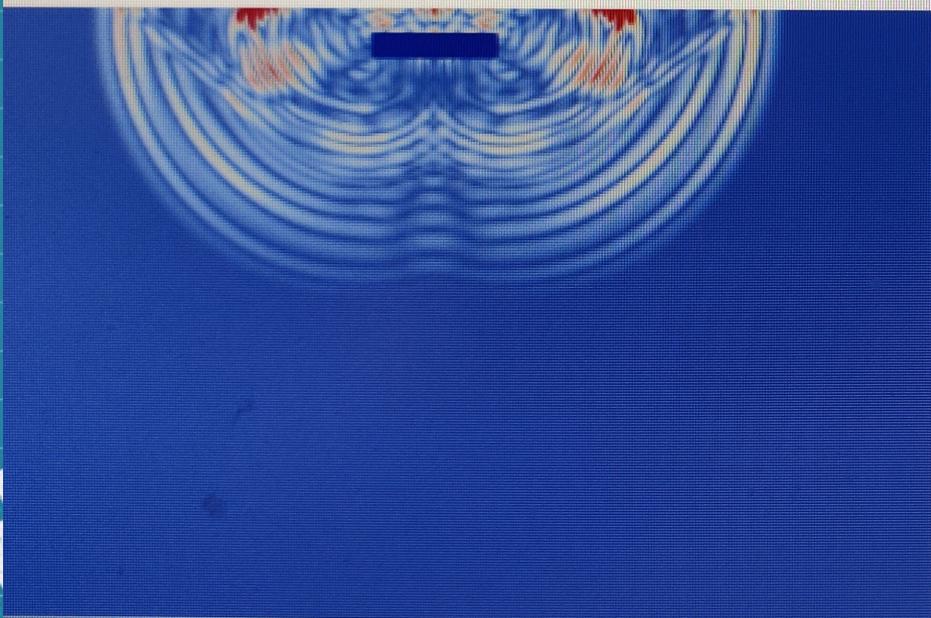




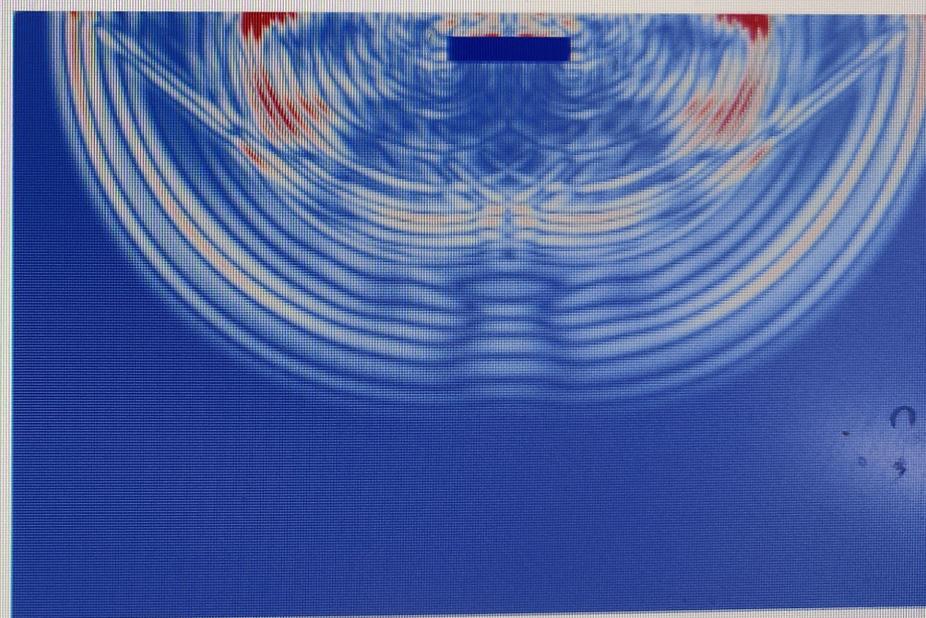
а) Волновое поле для  $t = 0.1$  с



б) Волновое поле для  $t = 0.2$  с

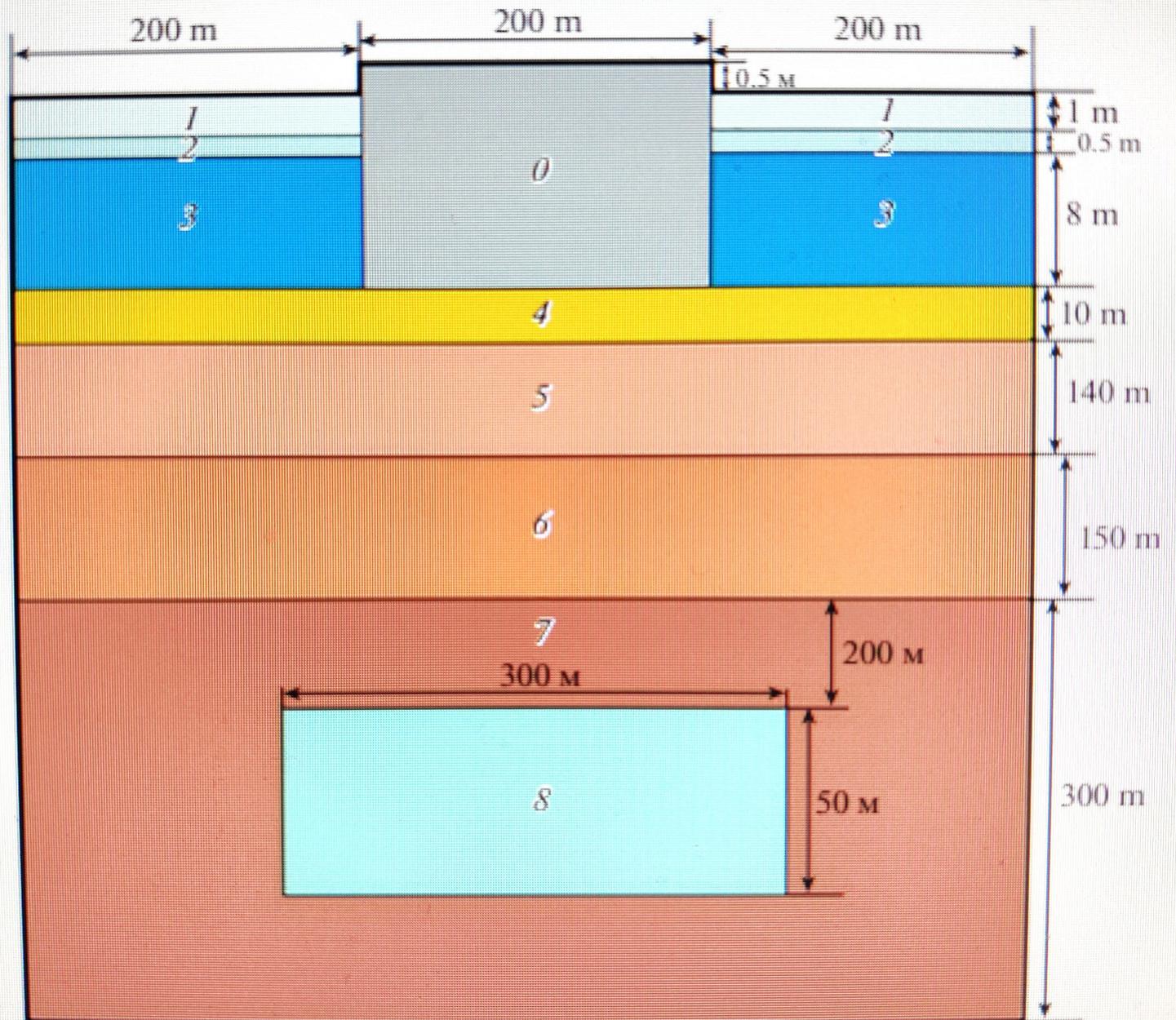


в) Волновое поле для  $t = 0.3$  с



г) Волновое поле для  $t = 0.4$  с

# HYBRID GRID-CHARACTERISTIC SCHEMES



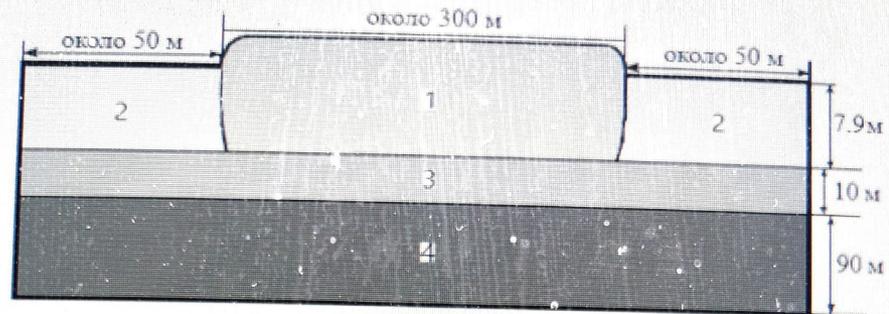


Рис. 42. Схема расчётной области.

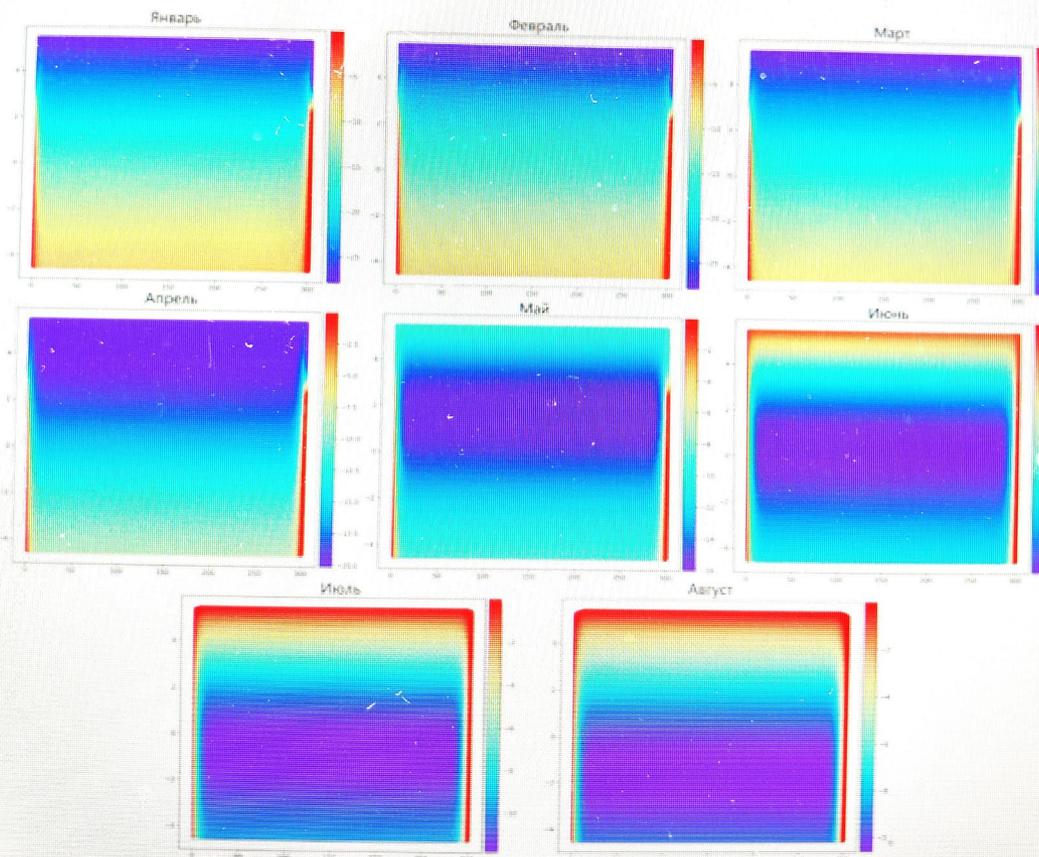


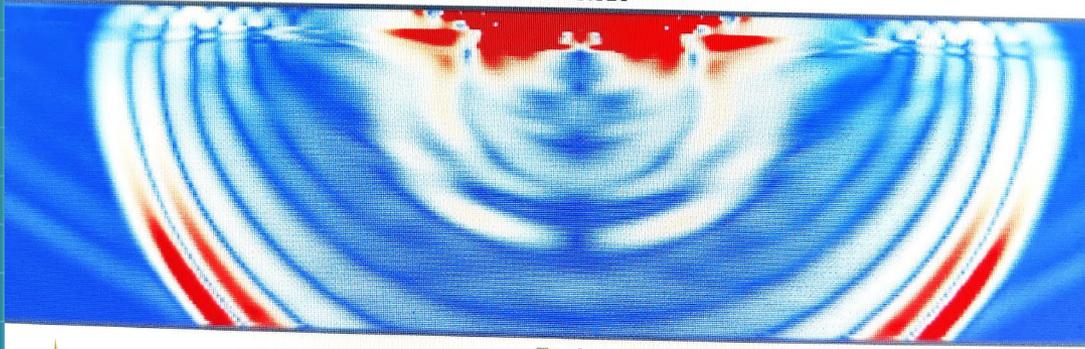
Рис. 43. Распределение температур во льду в конце каждого месяца.



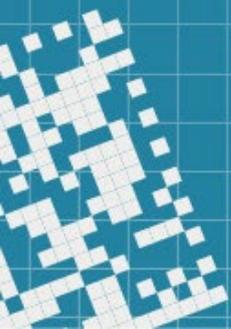
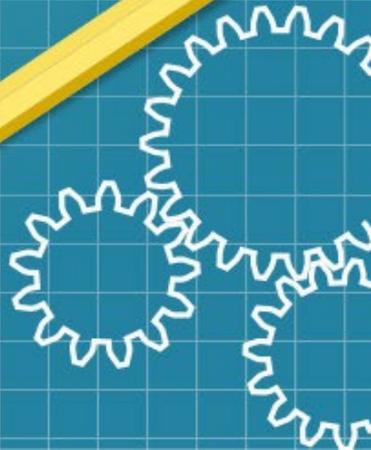
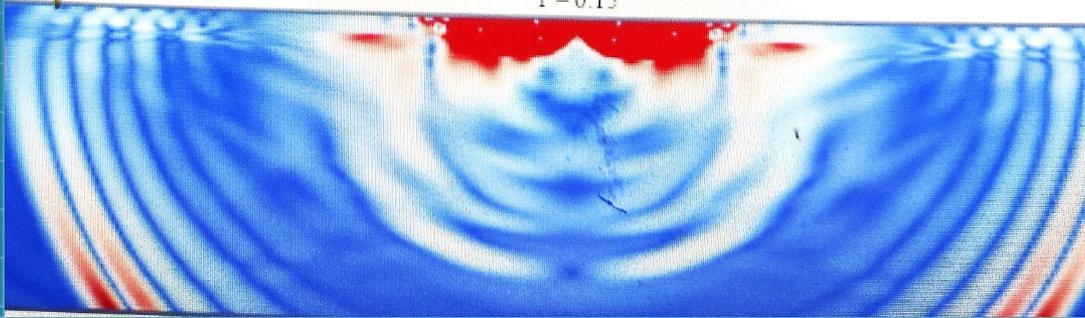
$T = 0.1$



$T = 0.125$



$T = 0.15$



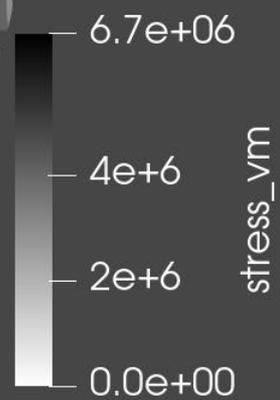
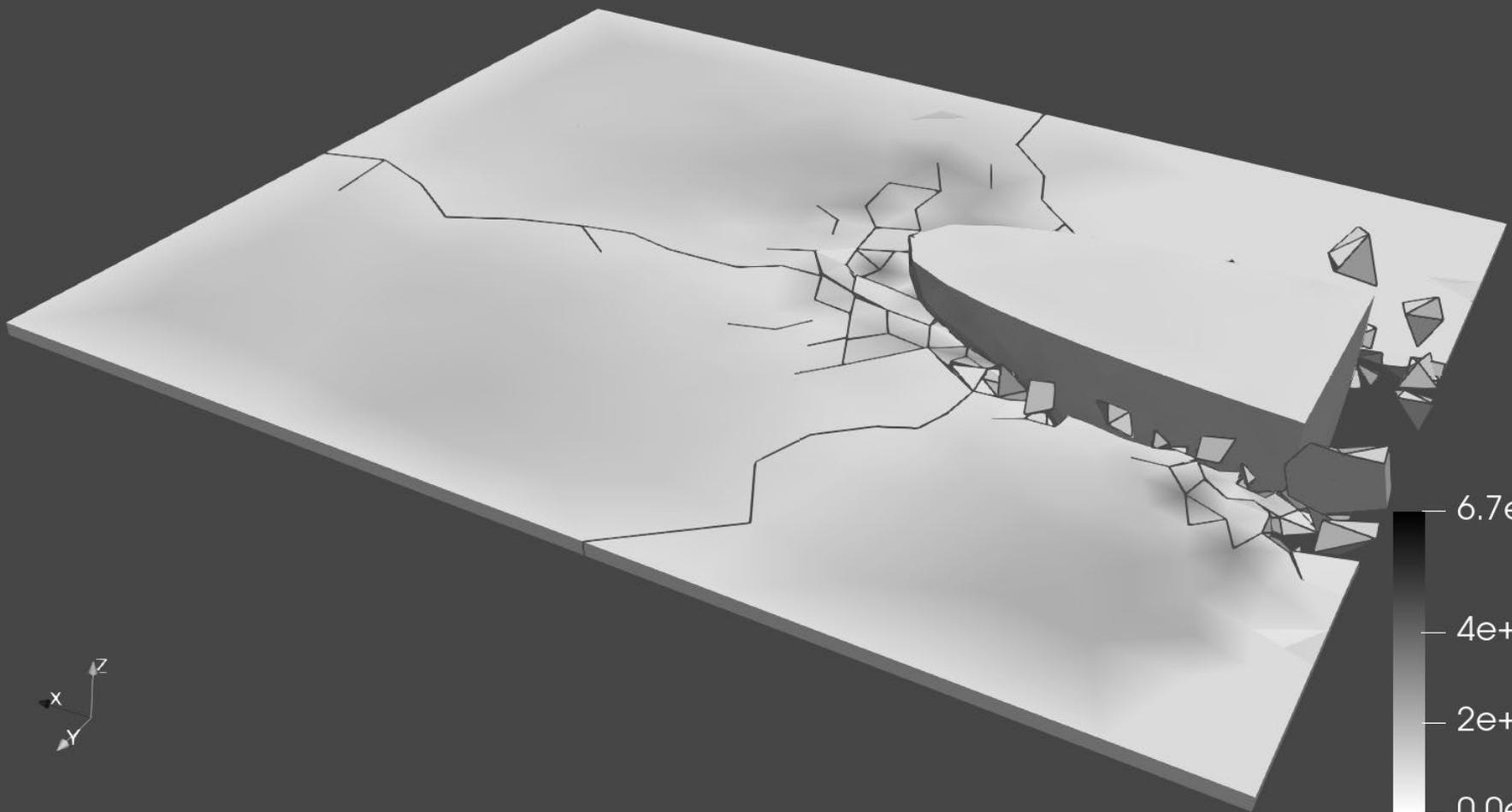


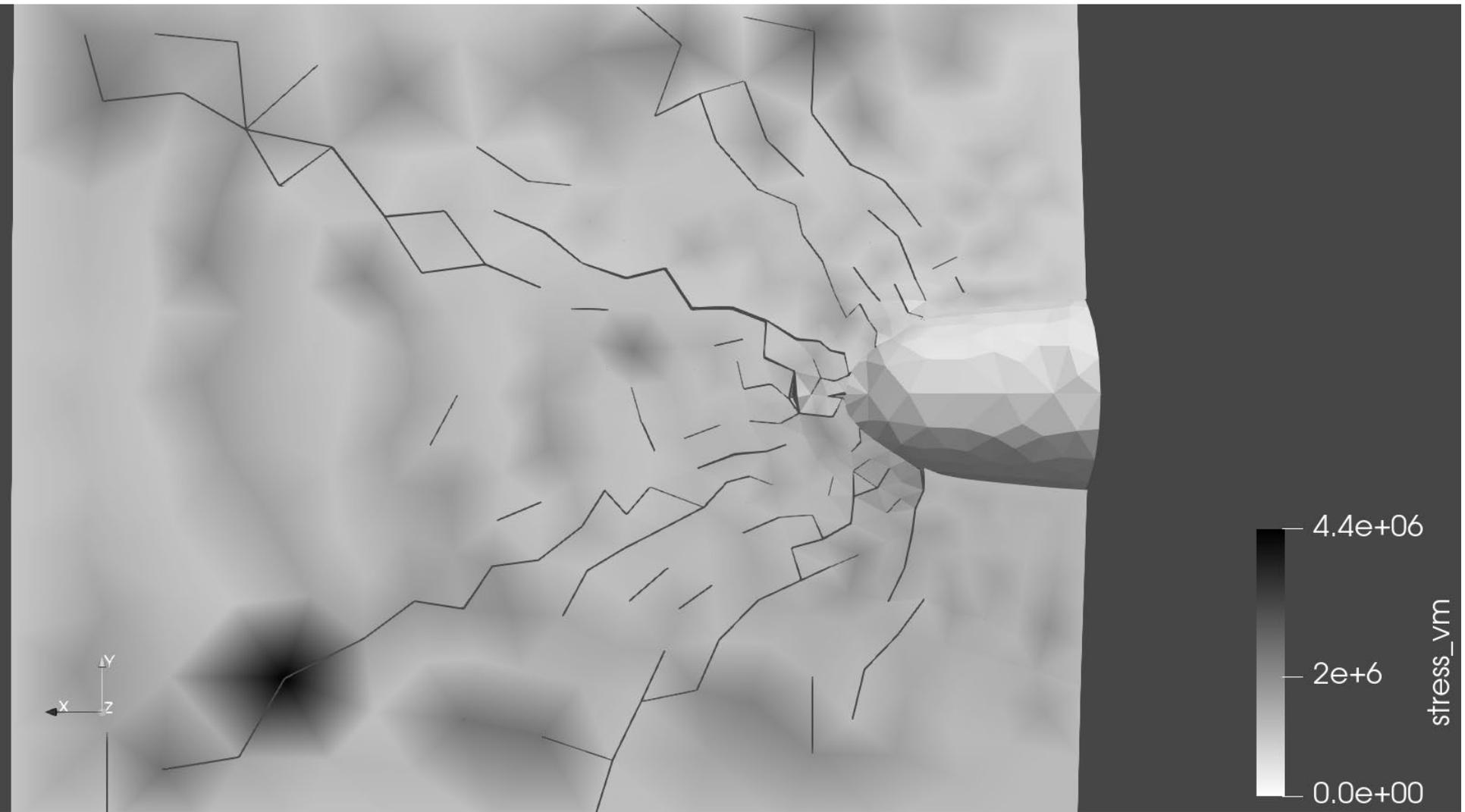
ЯМАЛ

# Фотография повреждений корабля

*R.E. Gagnon, J. Wang* Numerical simulations of a tanker collision with a bergy bit incorporating hydrodynamics, a validated ice model and damage to the vessel // *Cold regions. Science and Technology*, 2012.







bl  
M



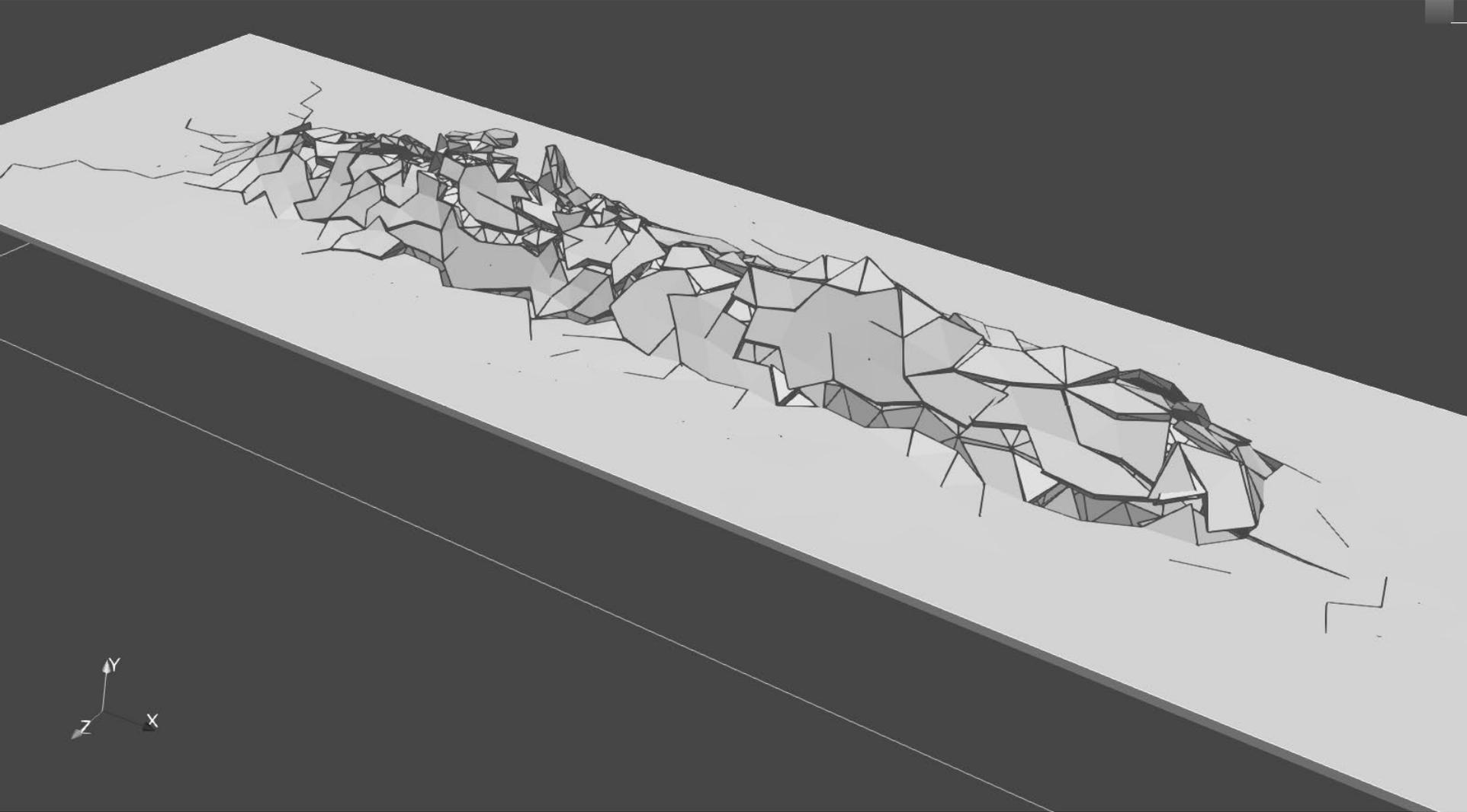
Iiyama

INPUT

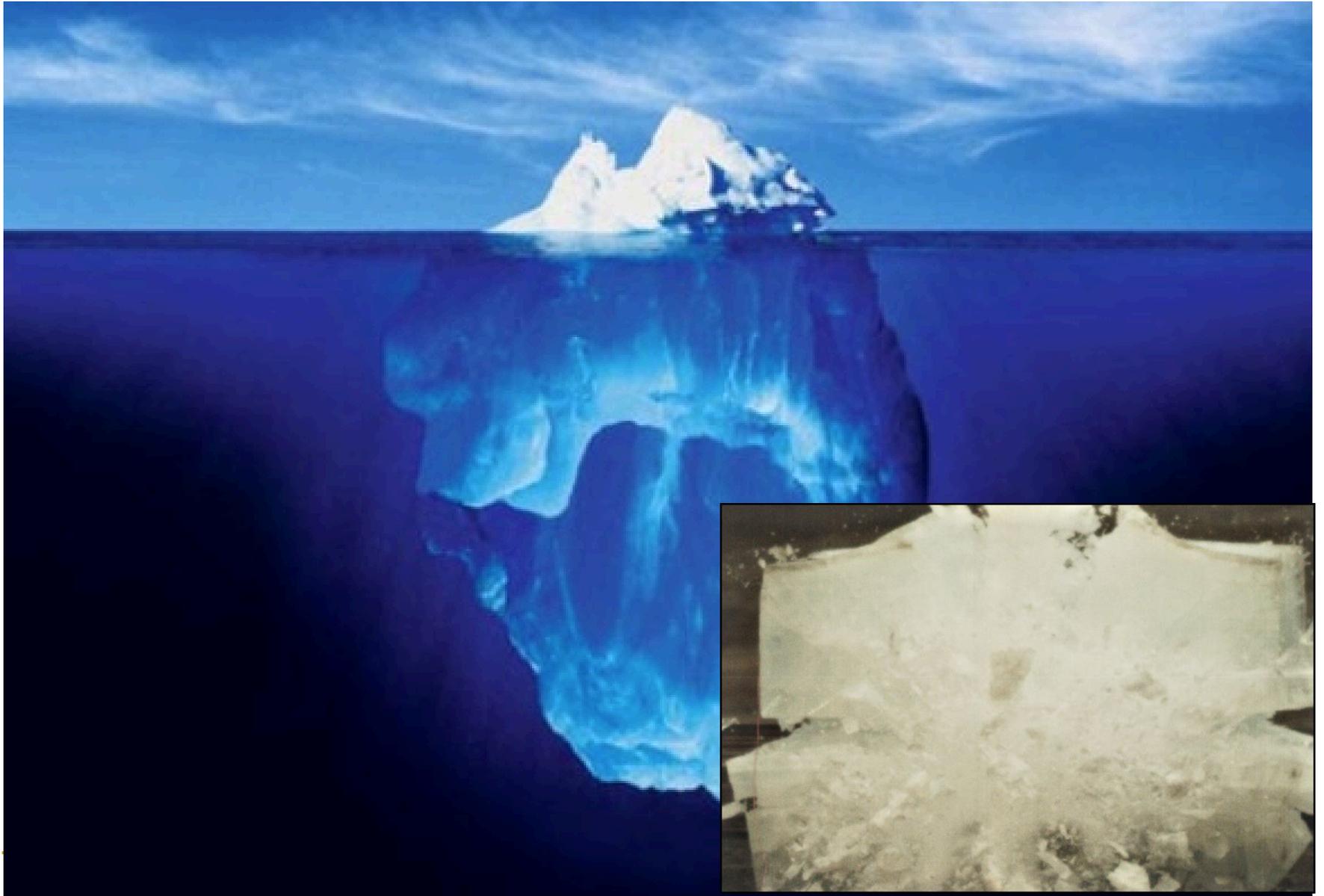
EXIT

PRINT

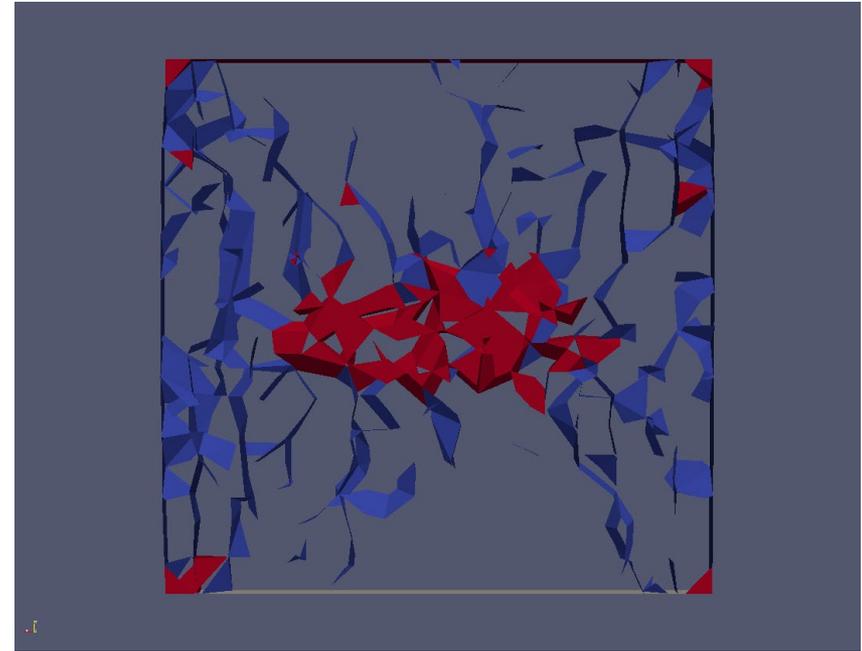
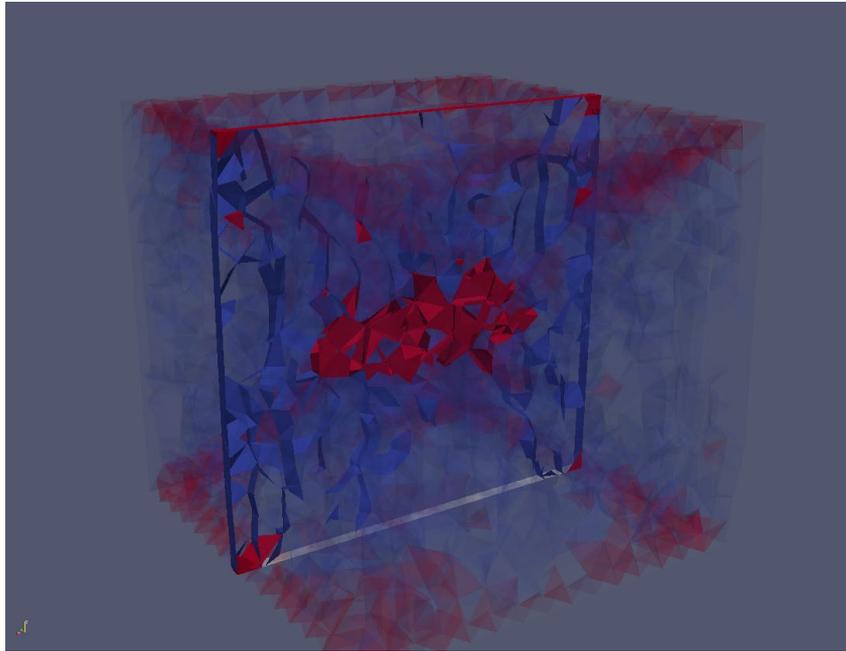
END

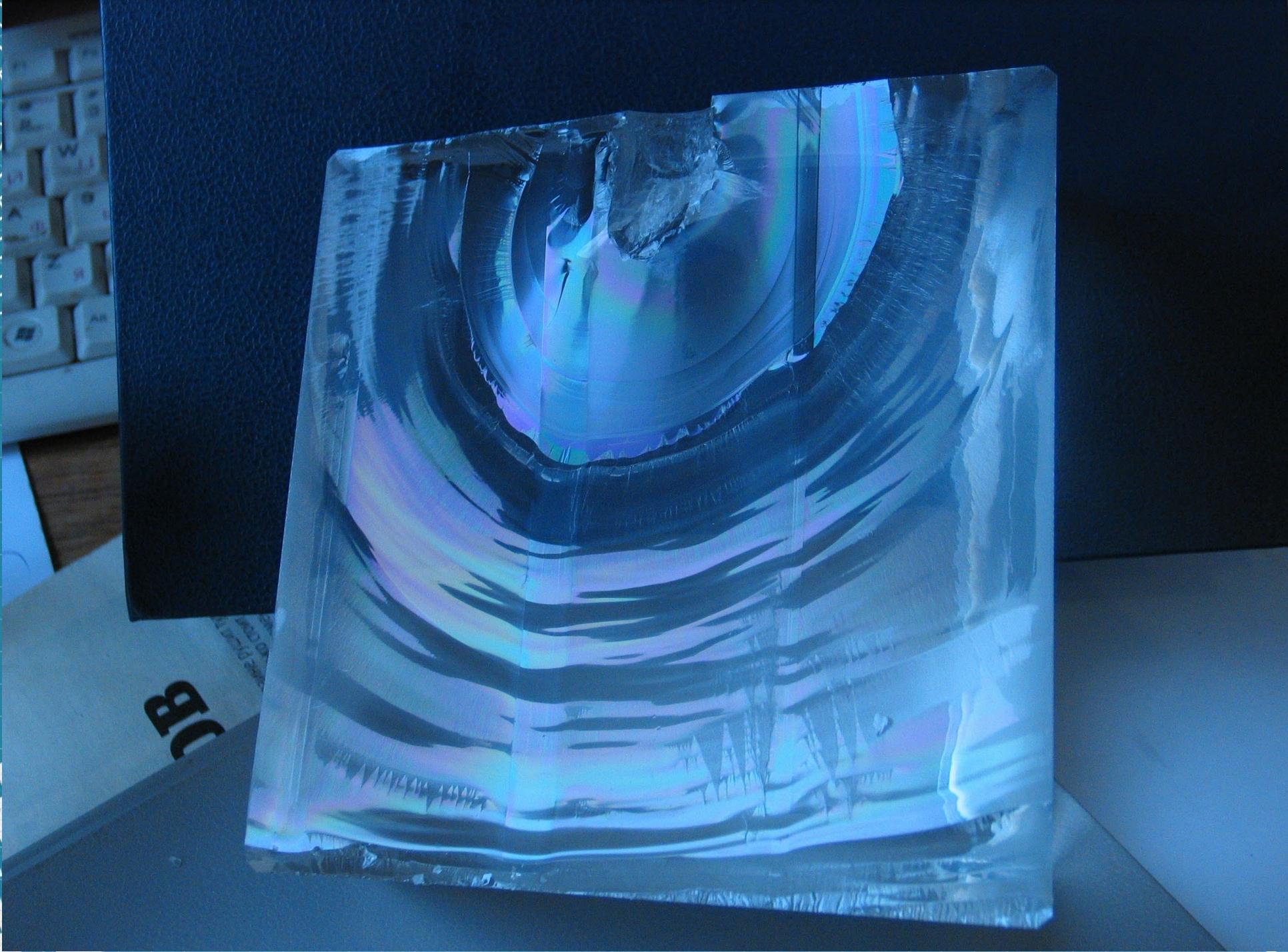


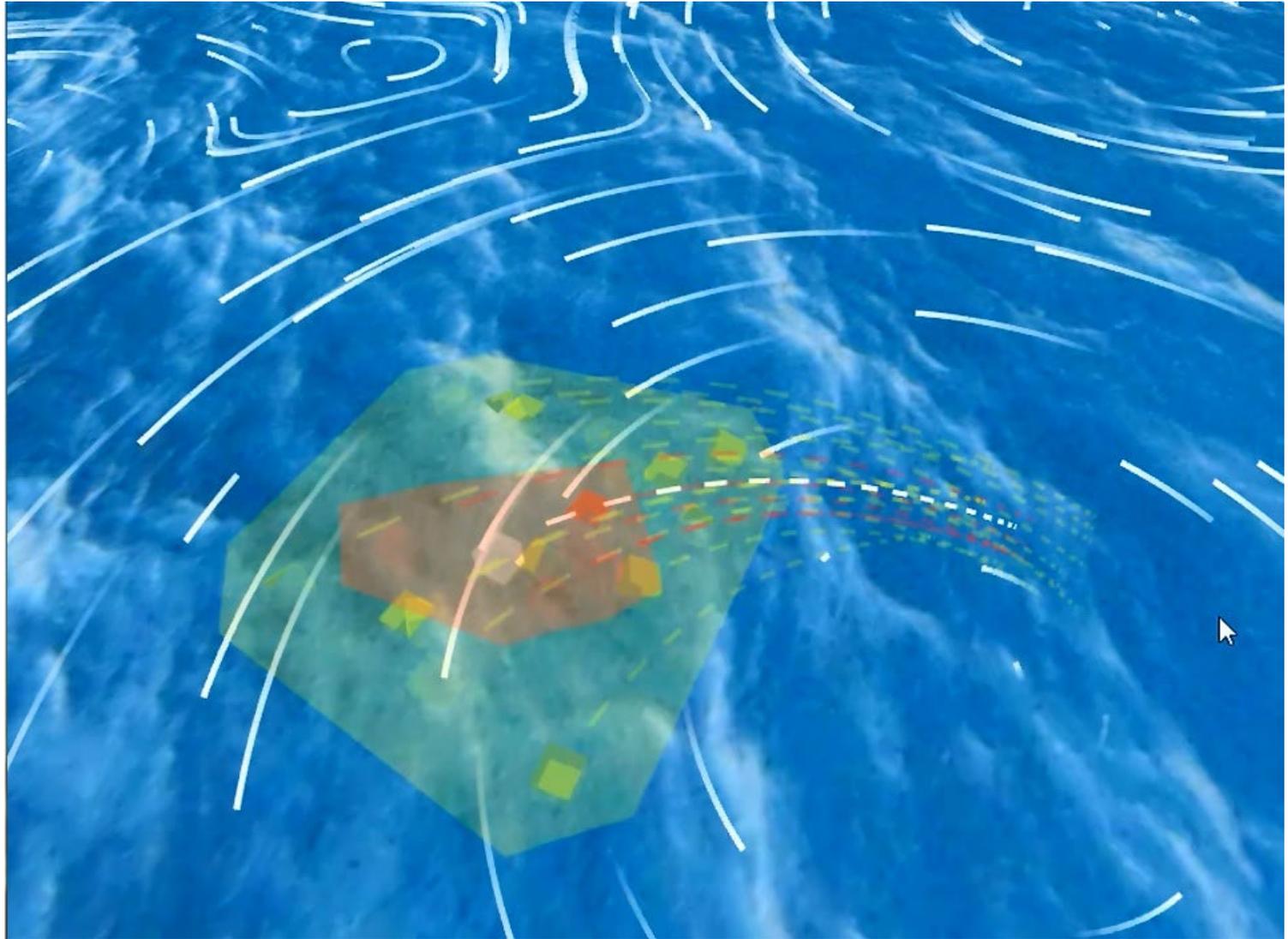




# Сечение картины разрушений ледяного образца

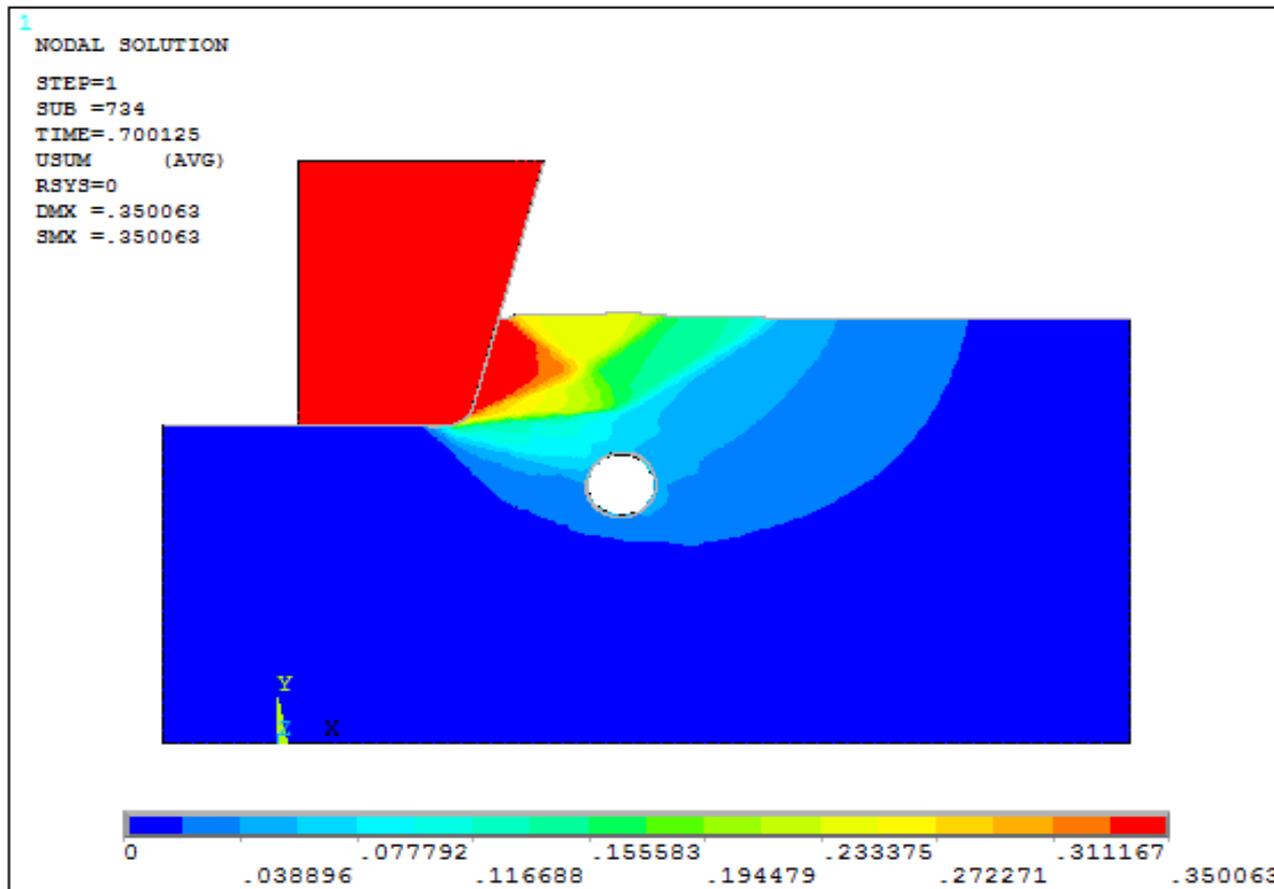






# 2-D model of the ice hummock keel's impact on deepened pipeline

*M.A. Naumov, D.A. Onishchenko*, Presentaion  
Gazprom VNIIGAZ LLC



Module offset distribution, m

---

# Численное моделирование сейсмостойкости

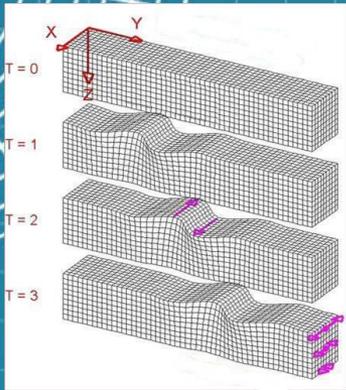
---

# Turkey – Syria earthquake of 06.02.2023

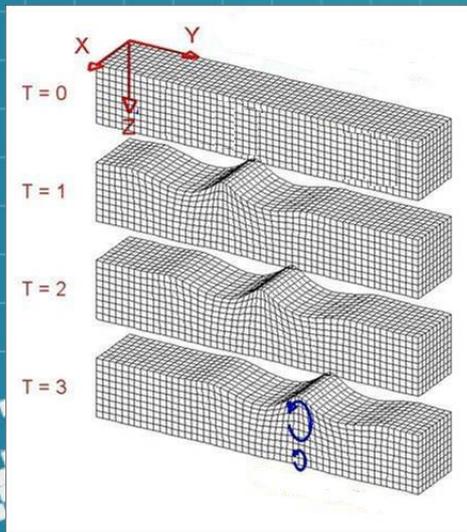
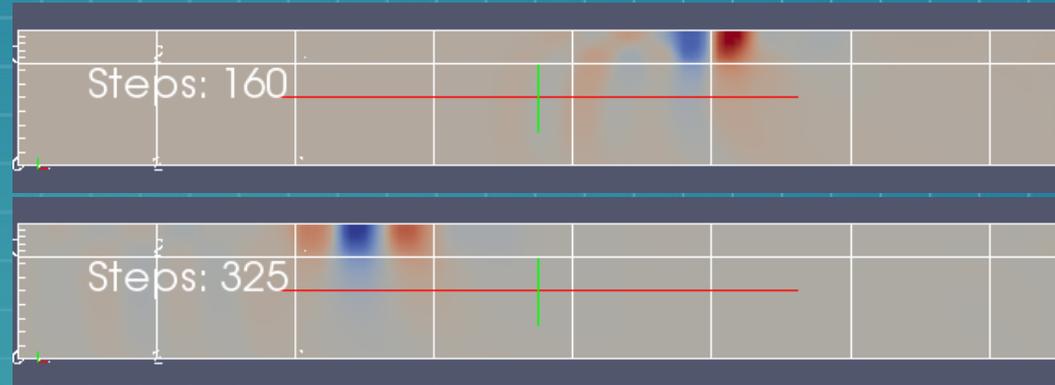
At least 15.73 million people and 4 million buildings were affected.  
About 164,000 buildings were either destroyed or severely damaged.  
All 15 buildings equipped with seismic isolating devices were destroyed.



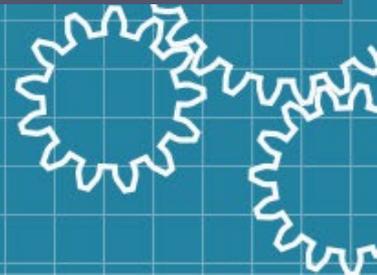
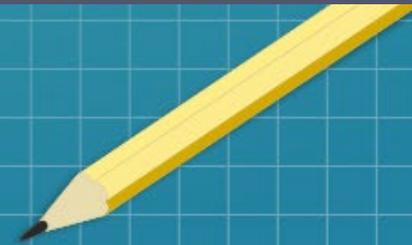
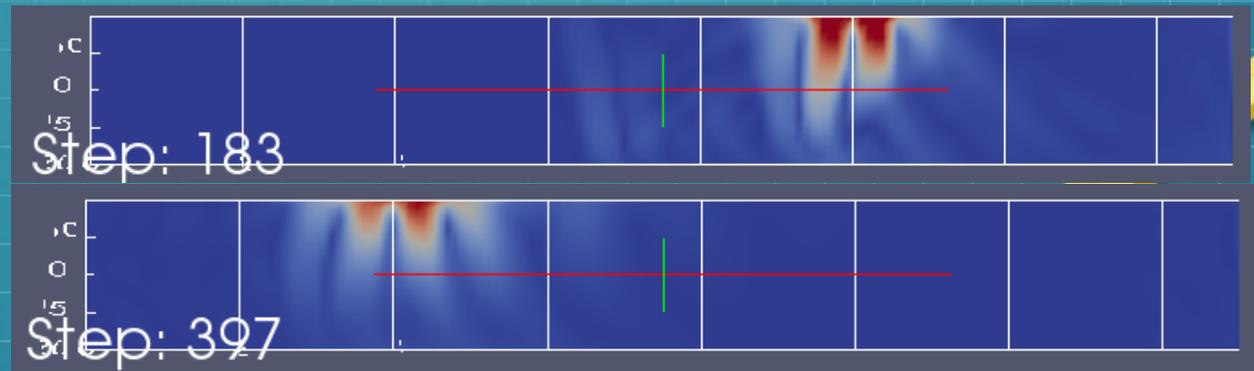
# Волны Лява и Релея

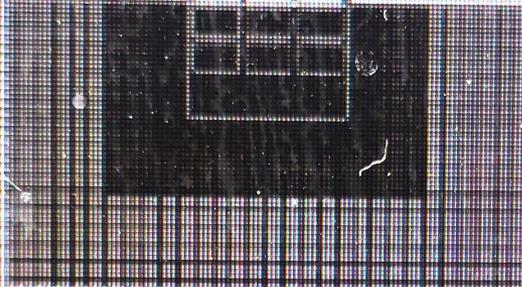
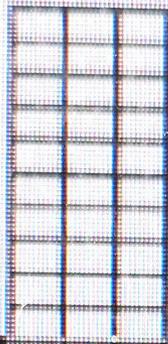


## Волны Лява



## Волны Релея





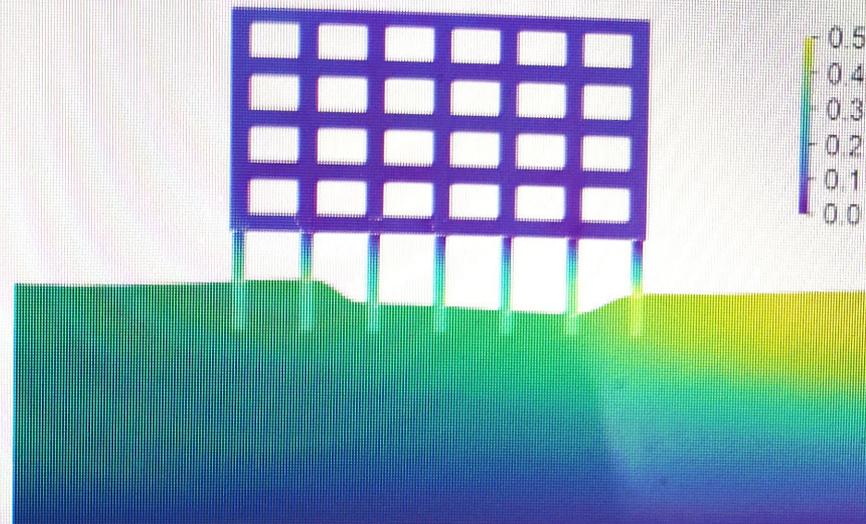
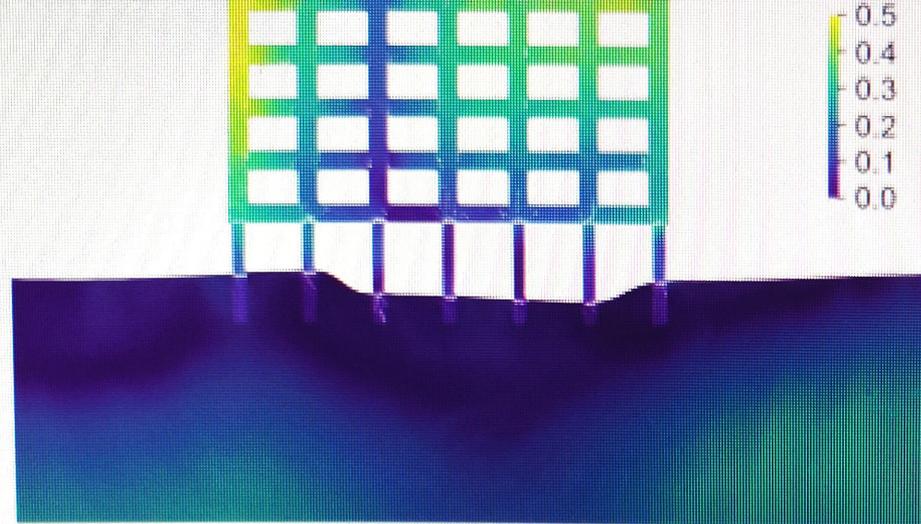
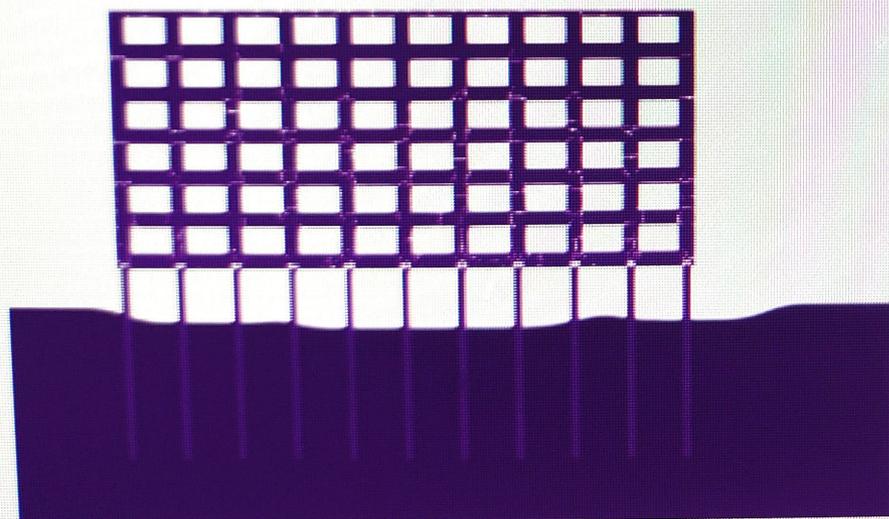


Figure 6. Test statement #2: (a) incident P-wave, time moment 0.0301 s (b) incident S-wave, time moment 0.0425 s.

(a)



(b)

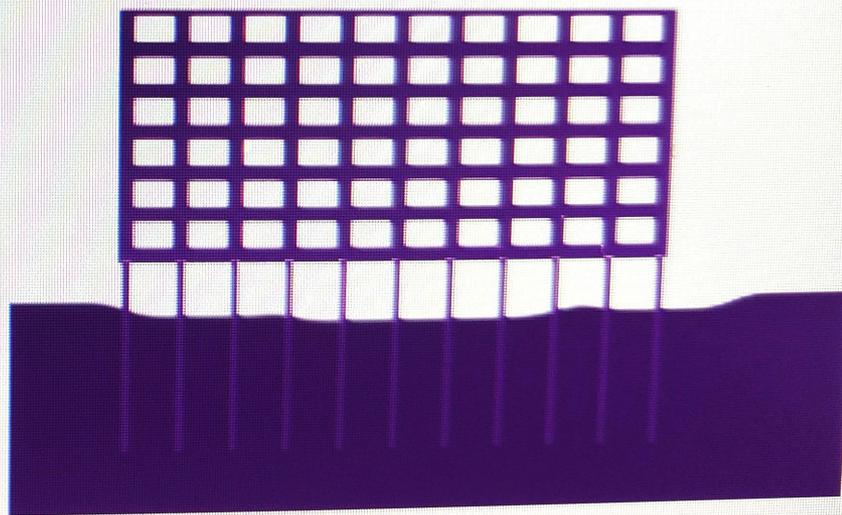


Figure 7. Test statement #1: (a) incident P-wave, time moment 0.043 s (b) incident S-wave, time moment 0.071 s.

# Seismic Zone Map of India

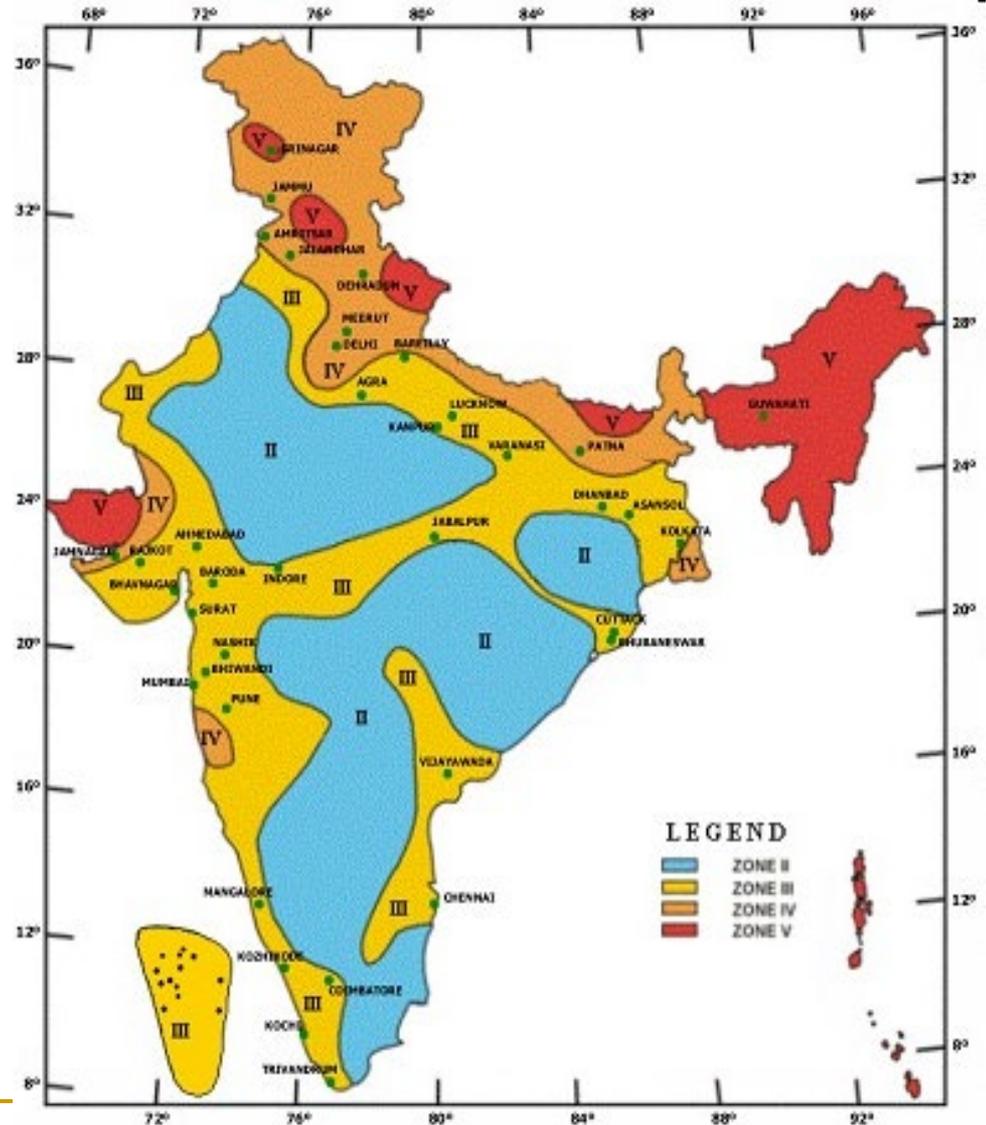
## Seismic Zone Intensity on Modified Mercalli (MM) intensity scale

II (Low intensity zone) - 4 (or less)

III (Moderate intensity zone) - 7

IV (Severe intensity zone) - 8

V (Very severe intensity zone) - 9 (and above)

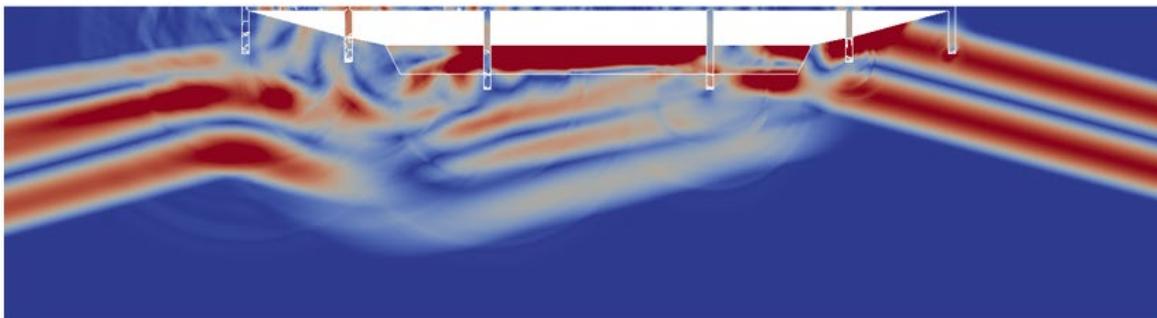


# Прочность конструкций

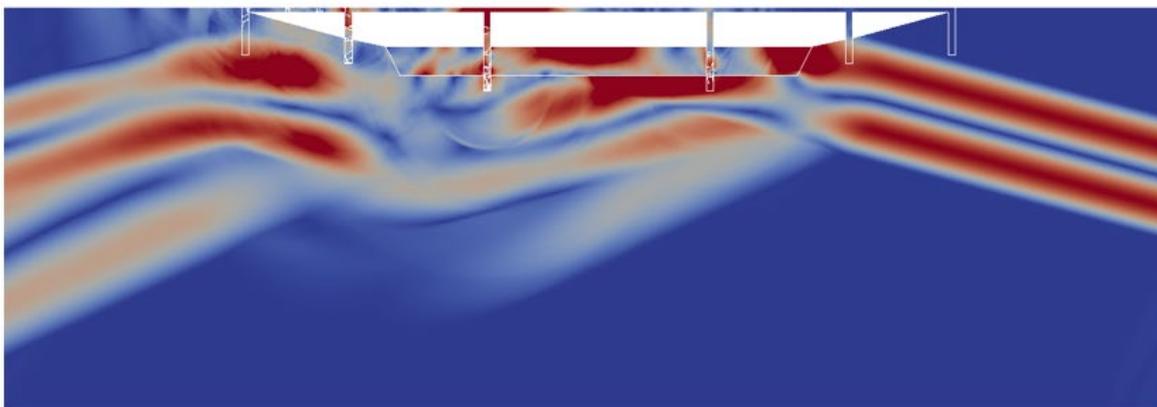
Опт  
карти

## Bridge over a River

### River Width, Wave Patterns



❖ Plane P-wave initial conditions



❖ Plane S-wave initial conditions

Dr Alena  
FAVORSKAYA

idt20-15

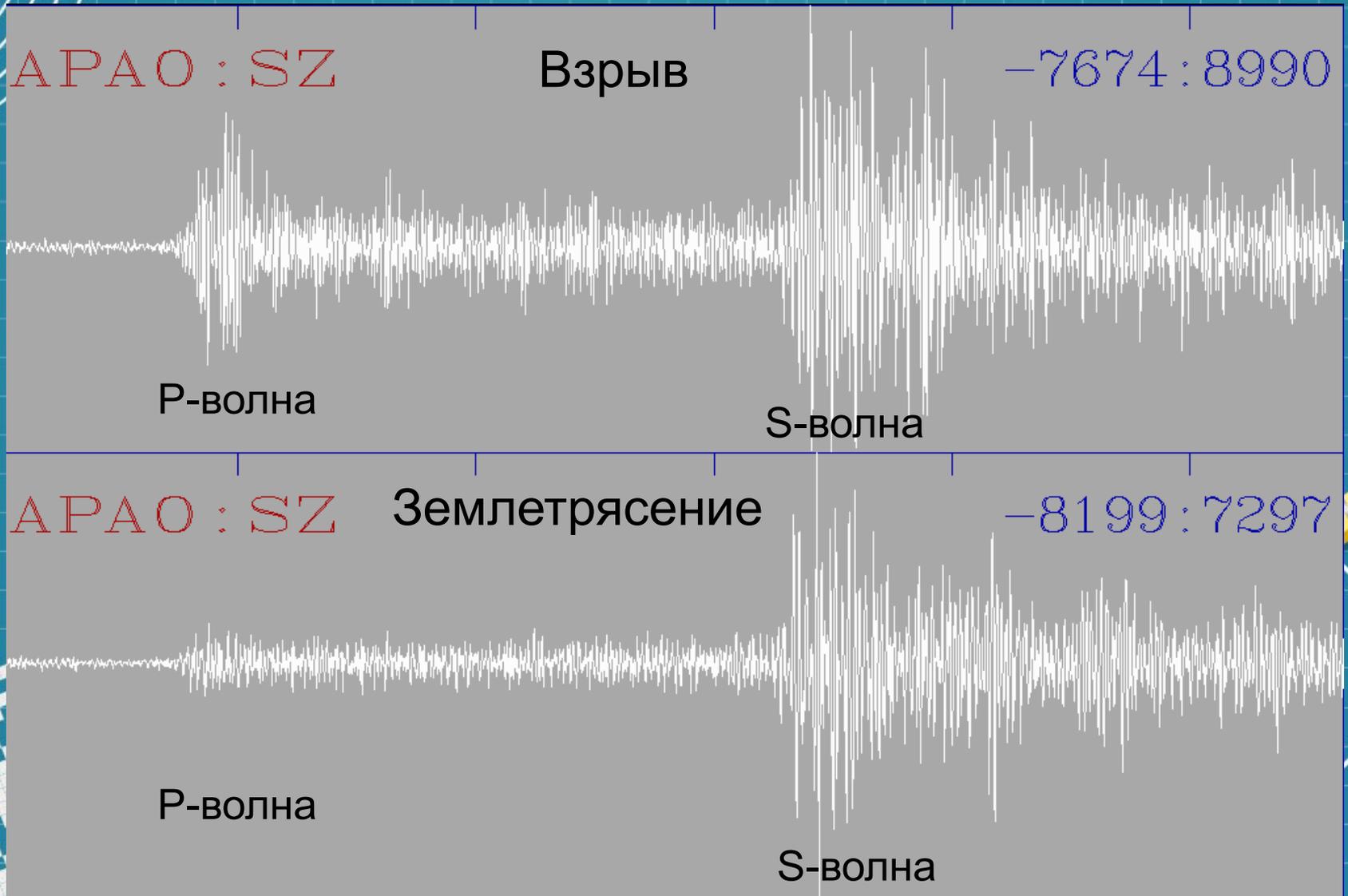
32/34

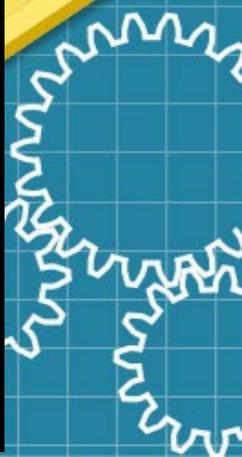
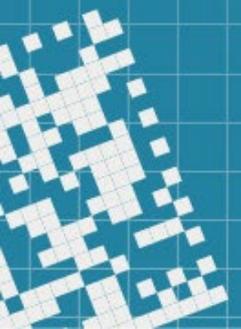
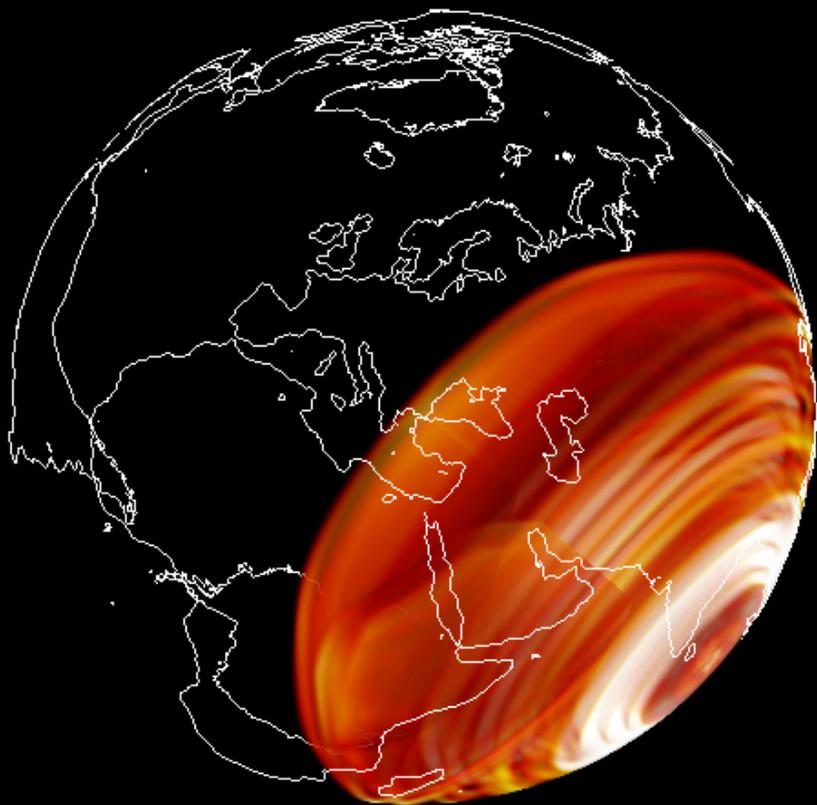
KES  
IDT  
2020

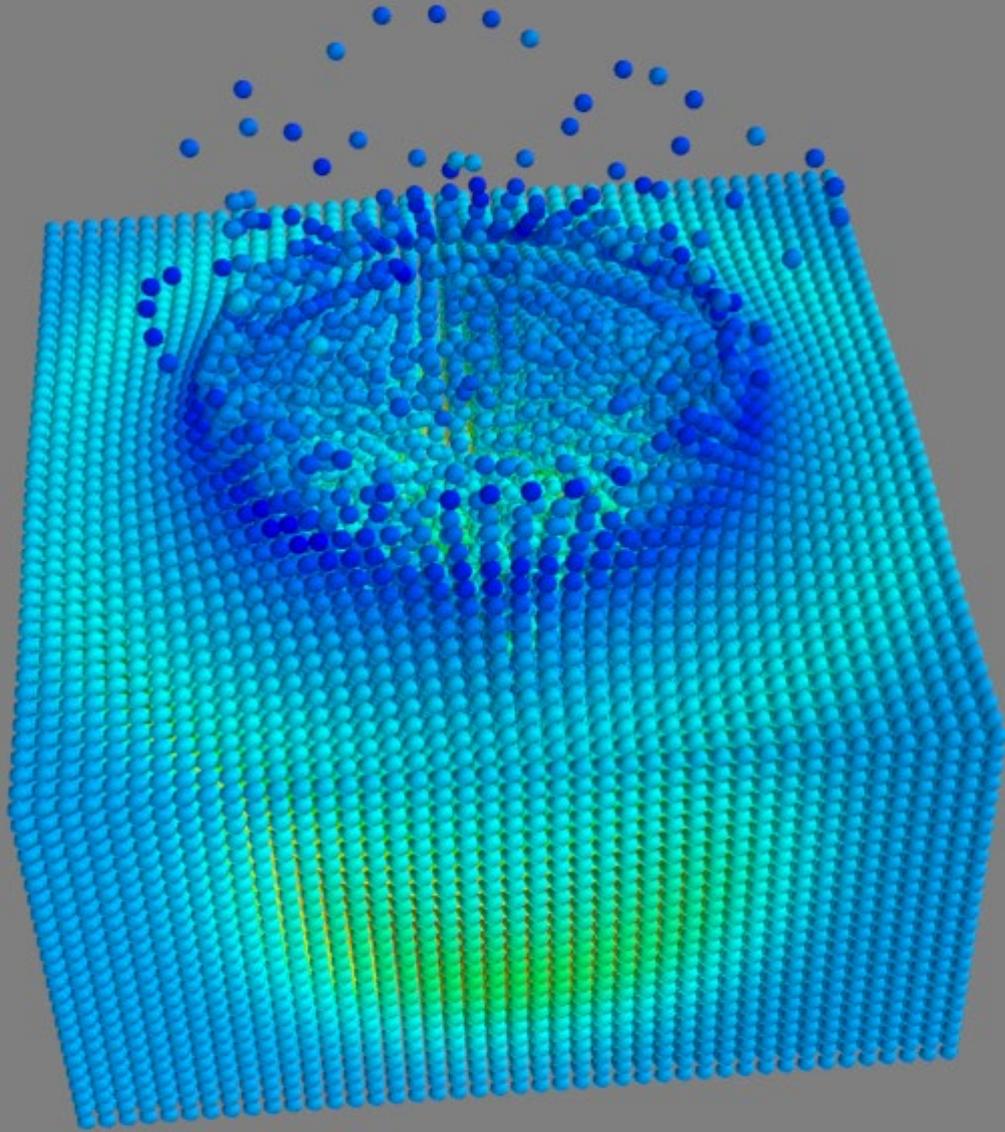




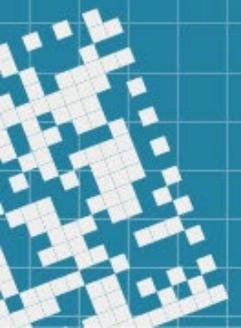
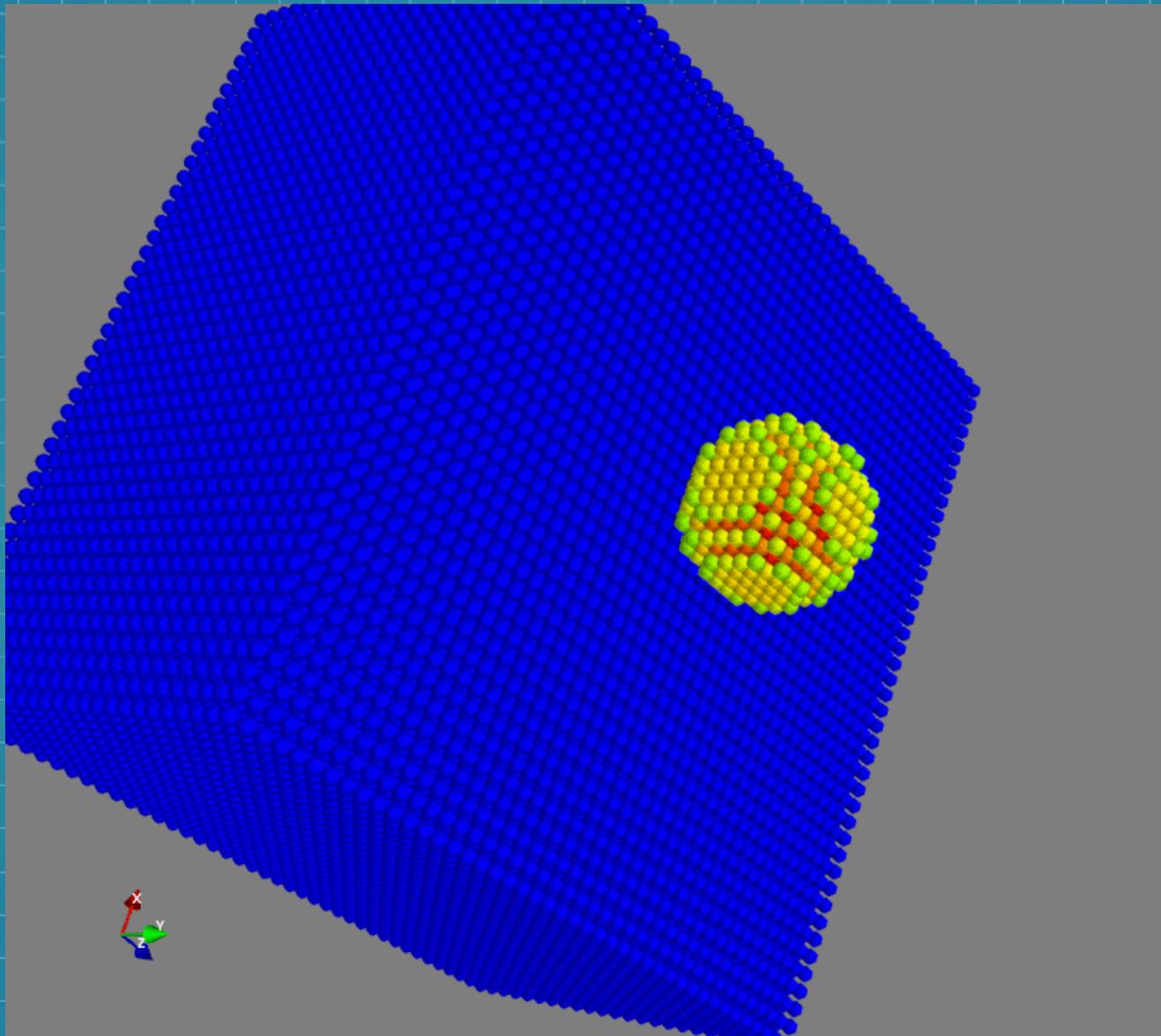
# Сравнение реальных сейсмограмм взрыва и землетрясения







# Падение метеорита на бетон

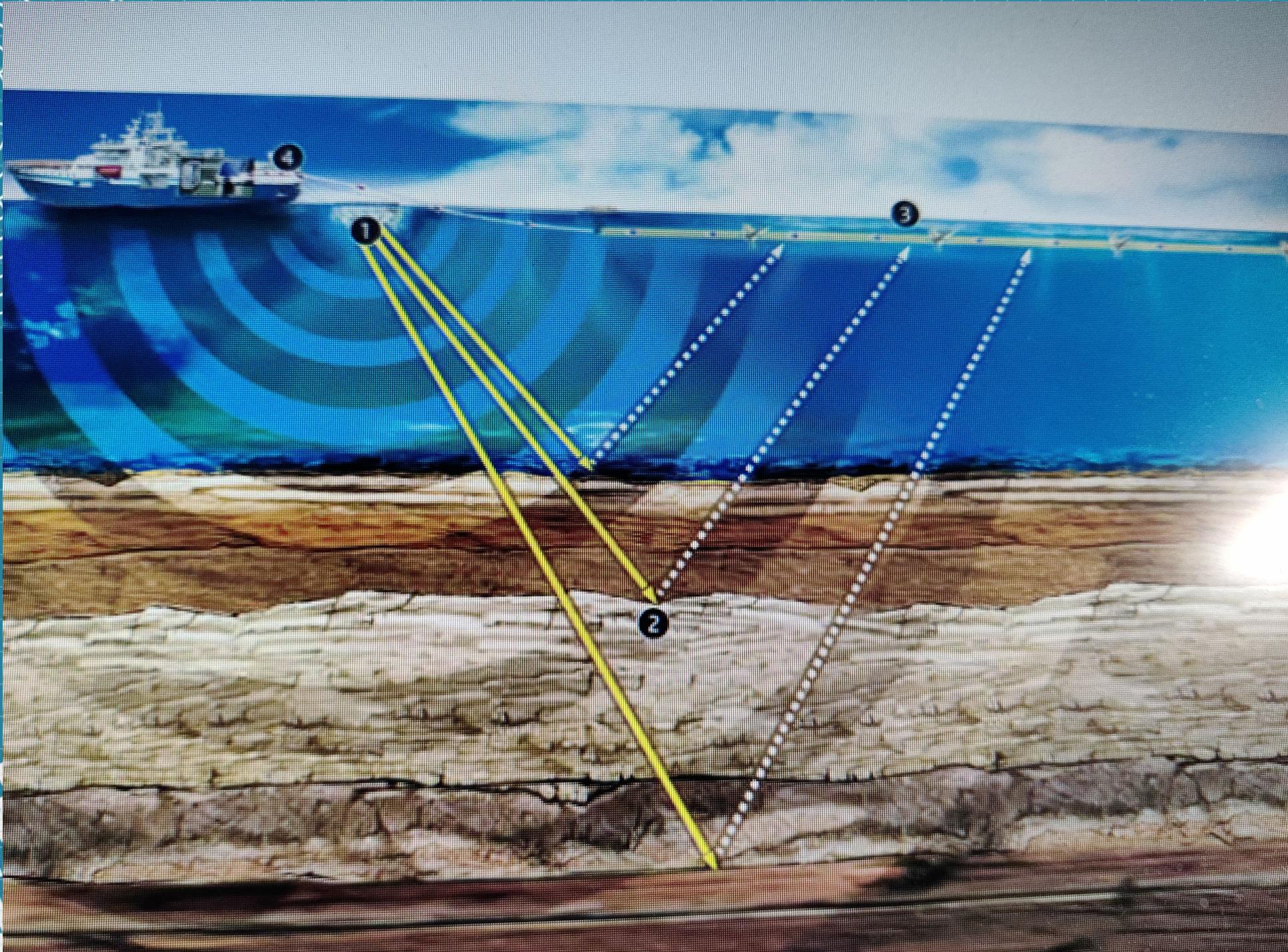


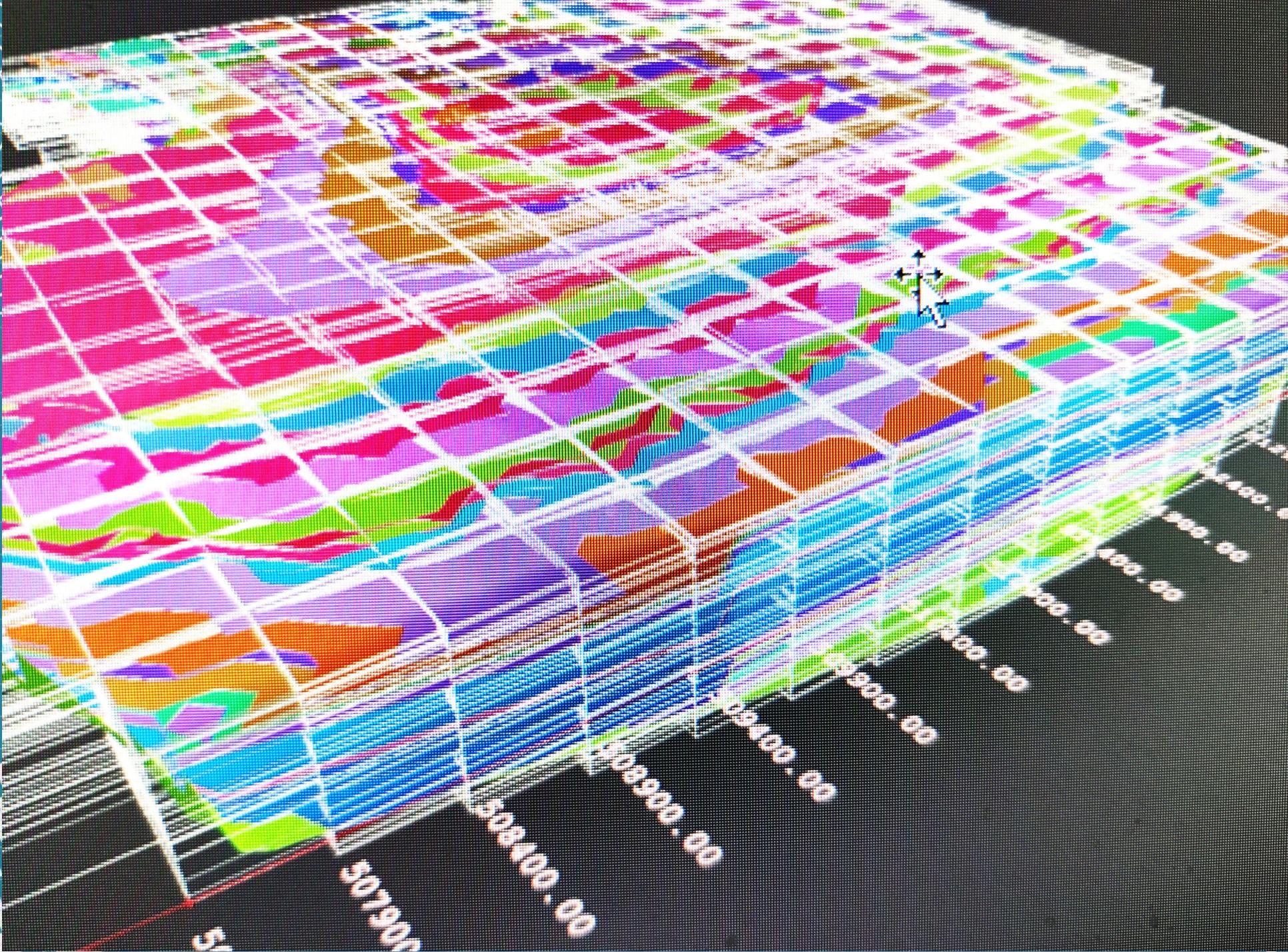


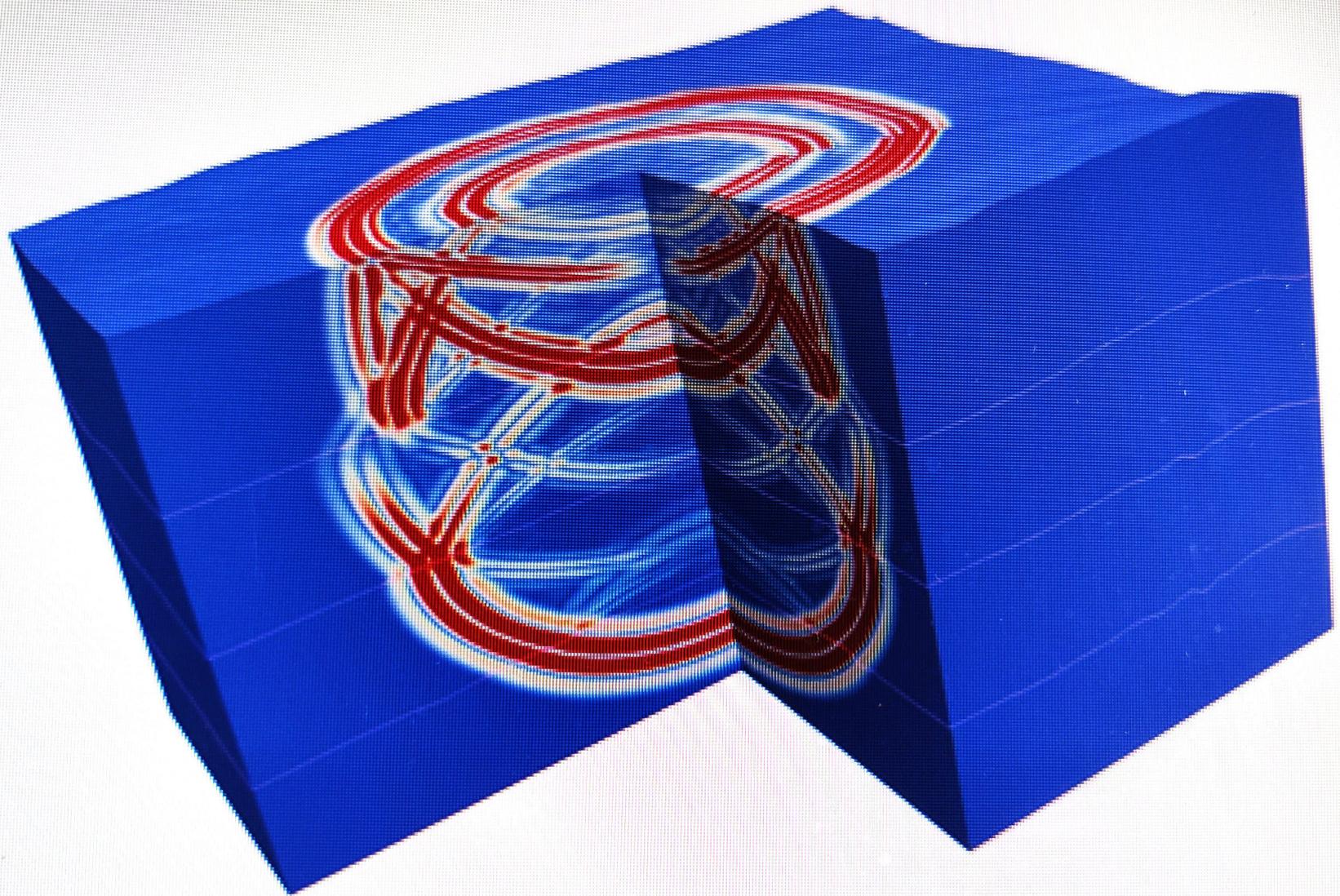
---

# Численное моделирование в геологии

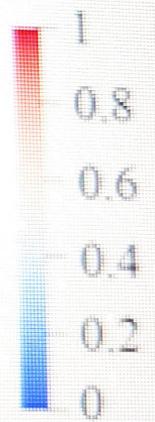
---



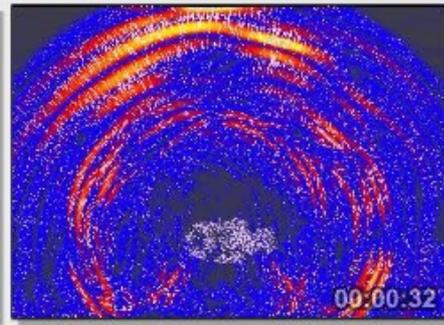
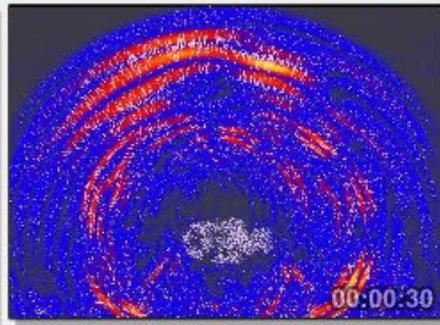
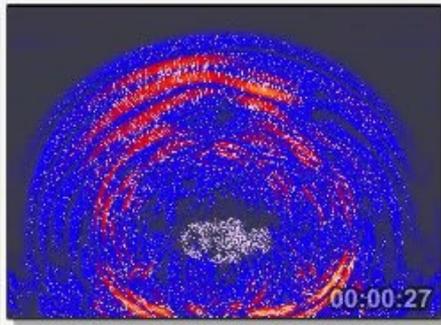
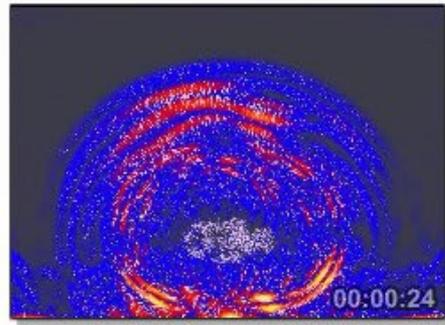
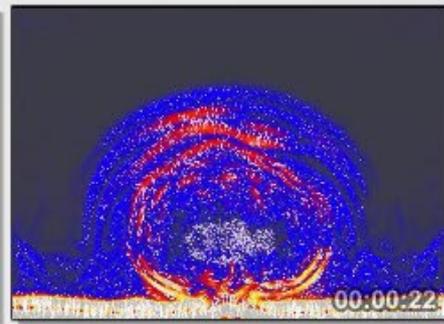
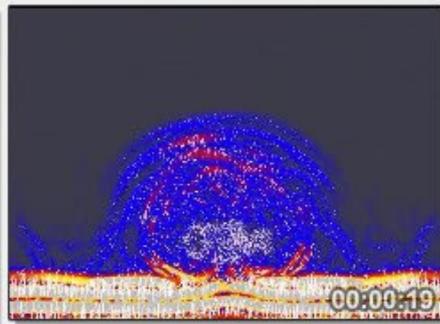
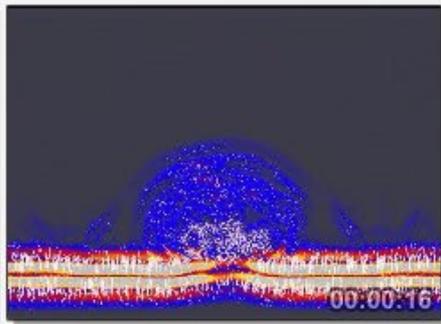
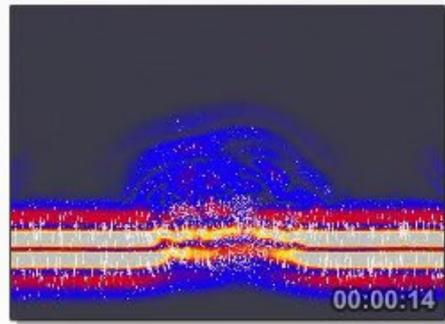
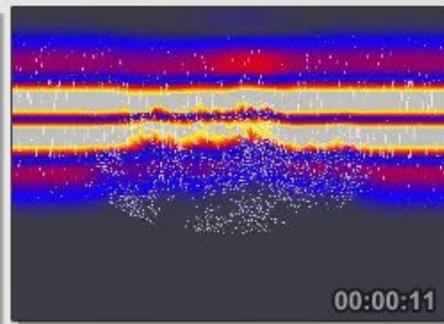
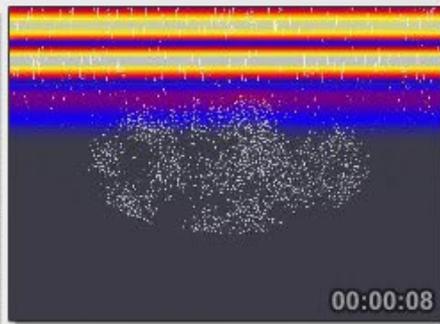
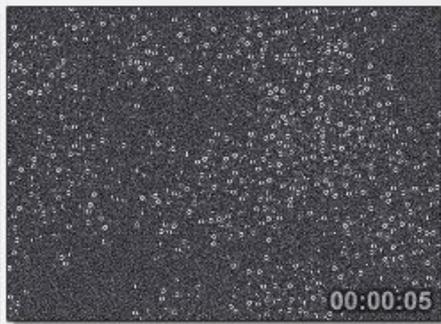
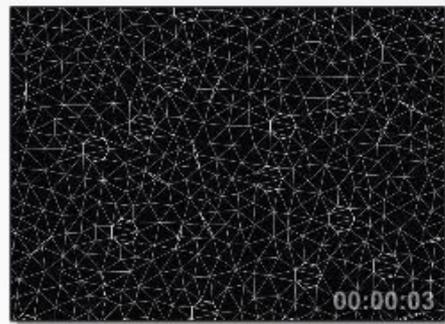




$v, 10^{-5} \text{ m/c}$

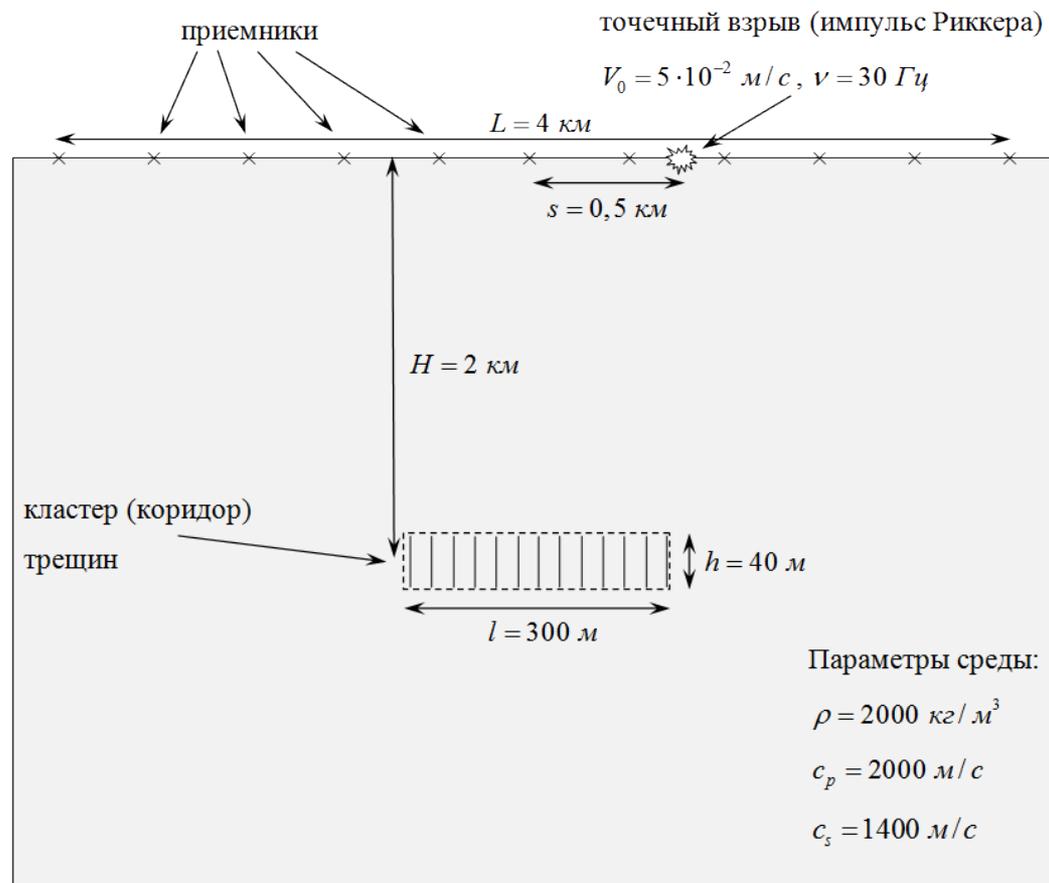


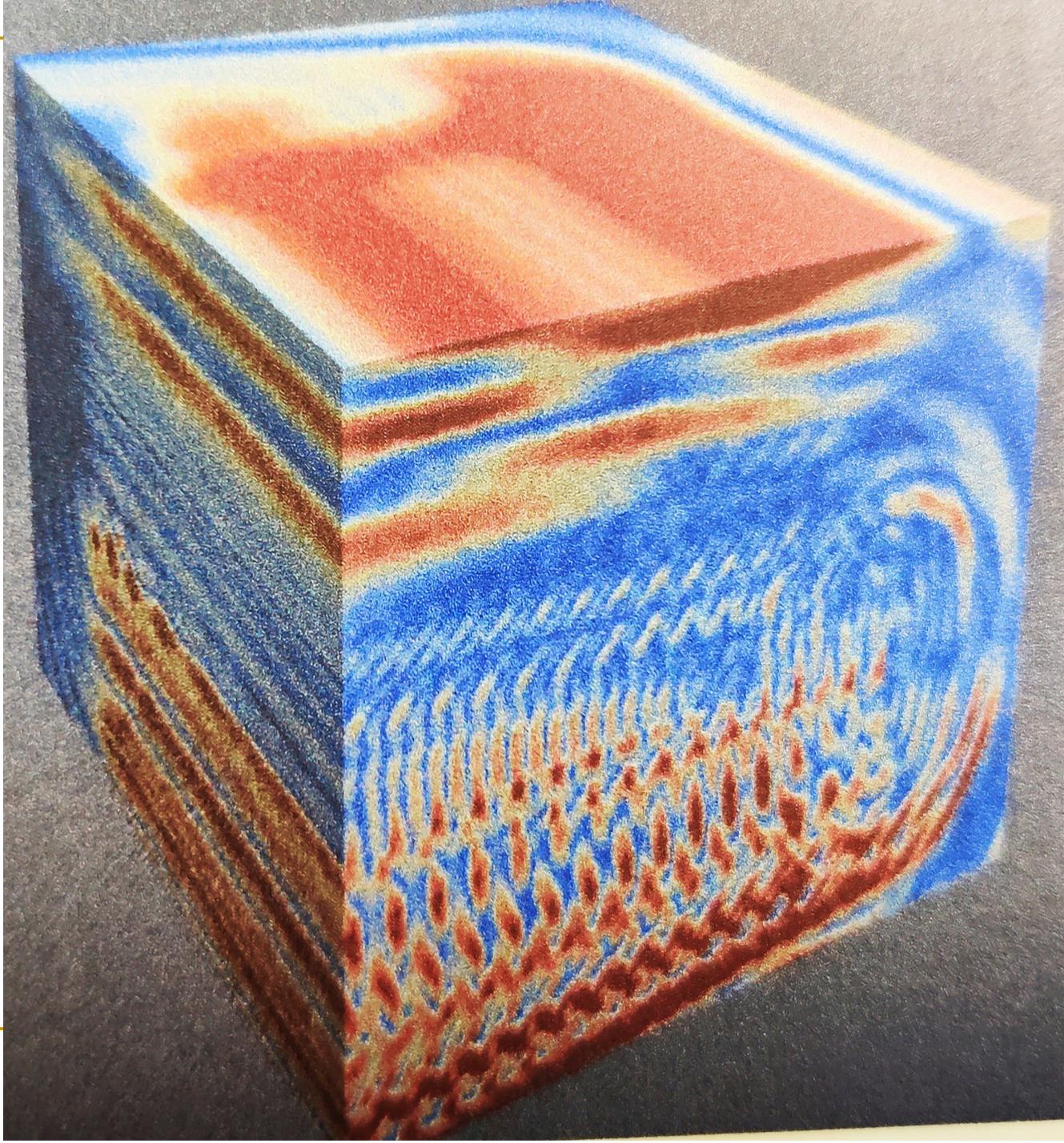
(b)



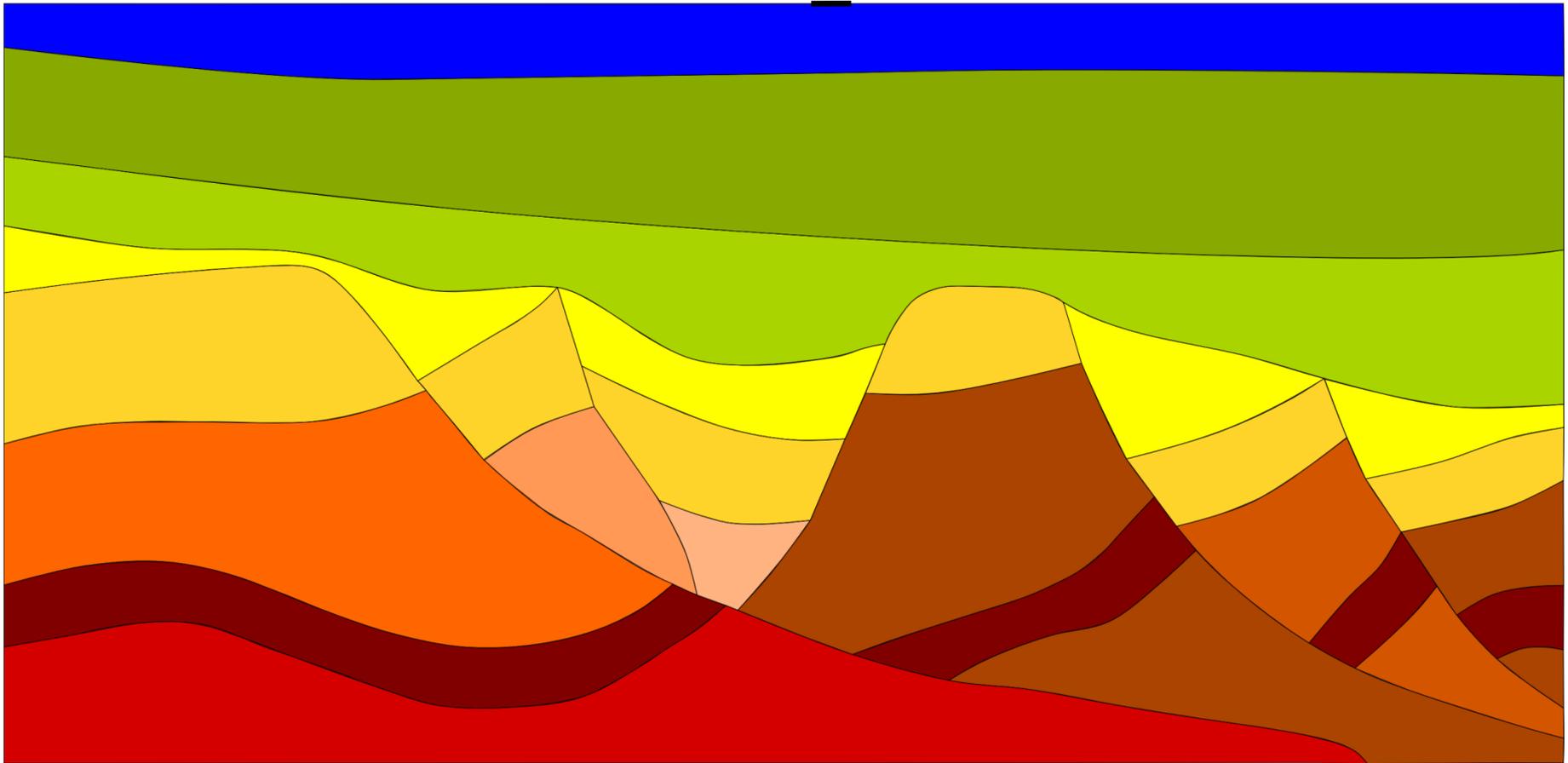
# Задачи численного моделирования

- Исследование свойств геологических сред
- Выявление закономерностей откликов
- Построение осредненных моделей сред
- Обратные задачи численного моделирования

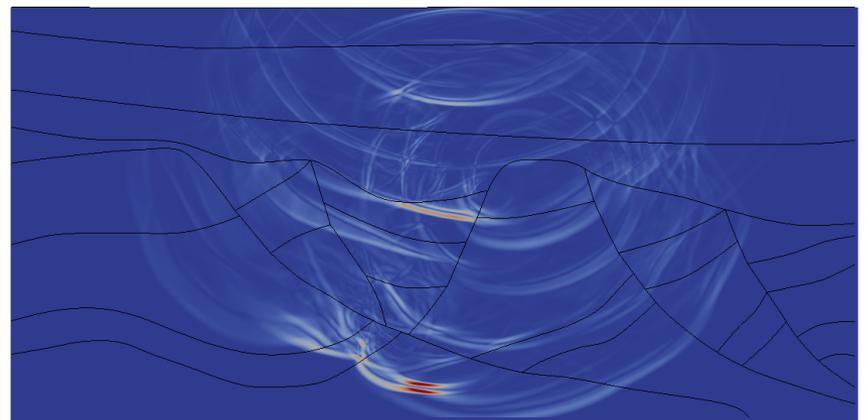
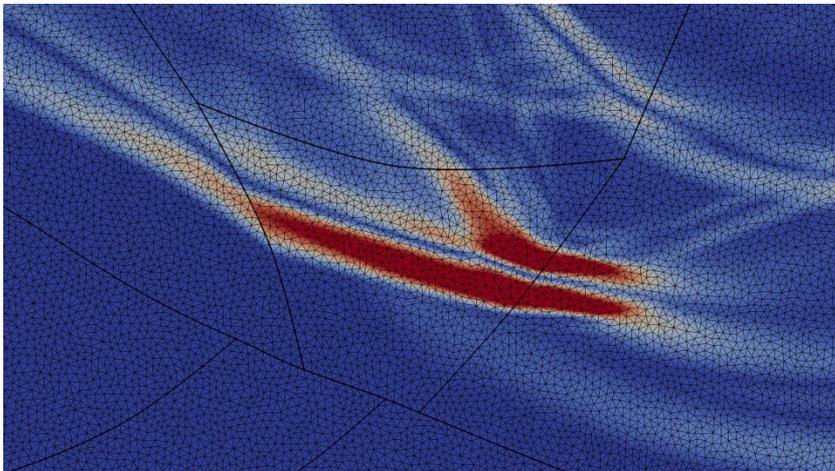
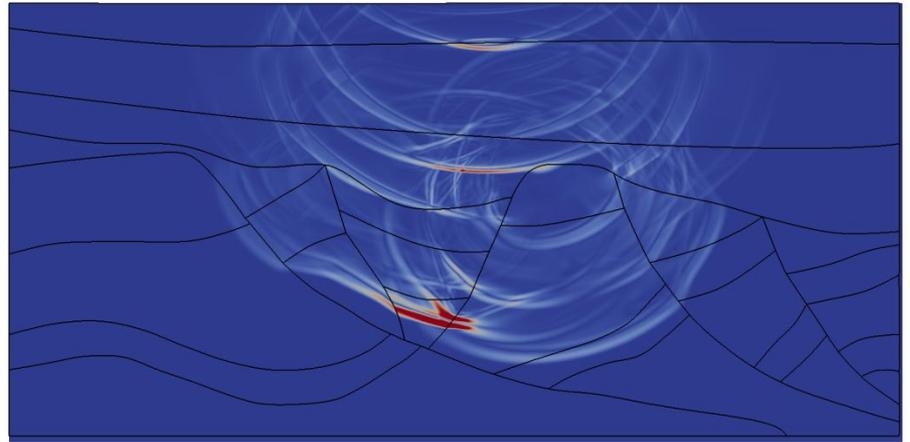
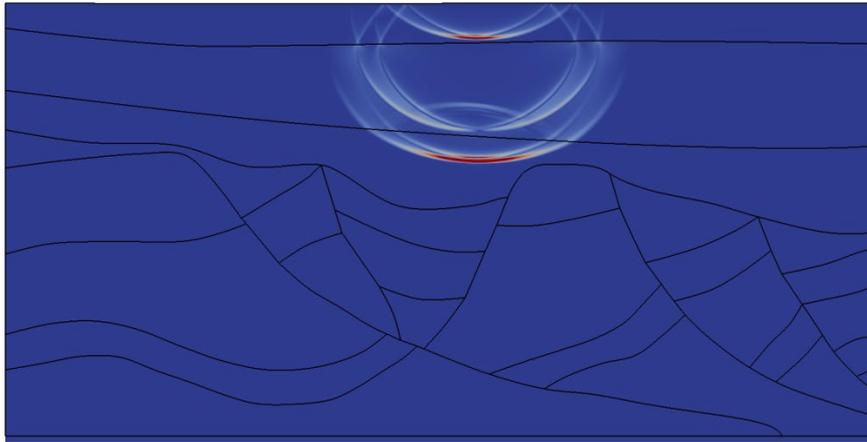




# Геология со сложными границами



# Геология со сложными границами

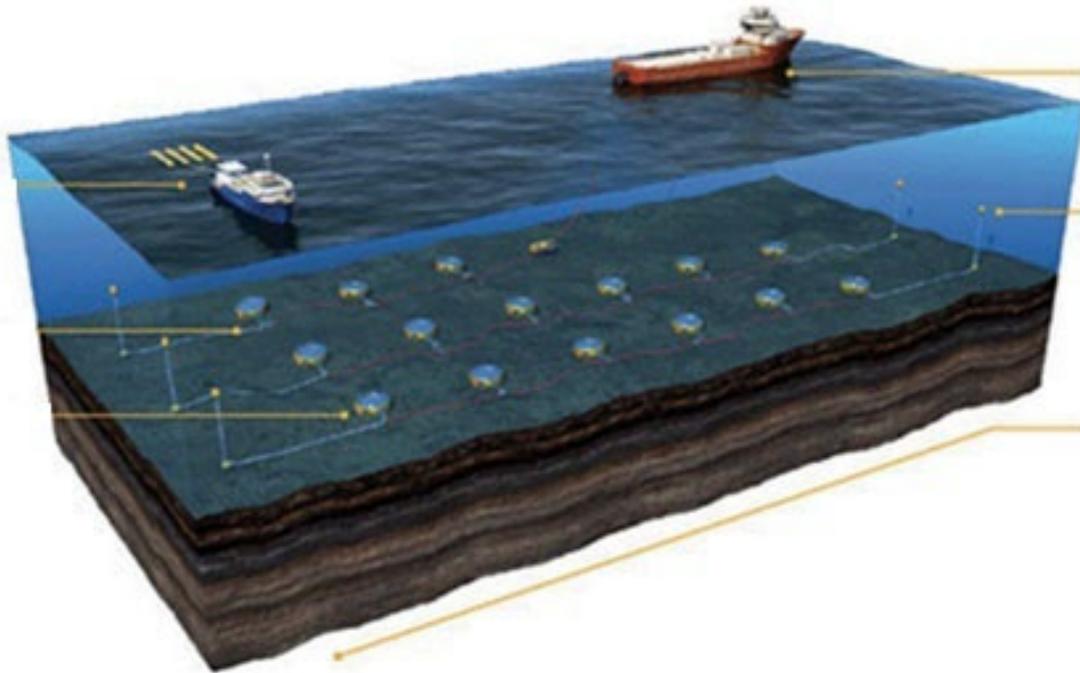


---

# Численное решение задач сейсморазведки в условиях Арктического шельфа

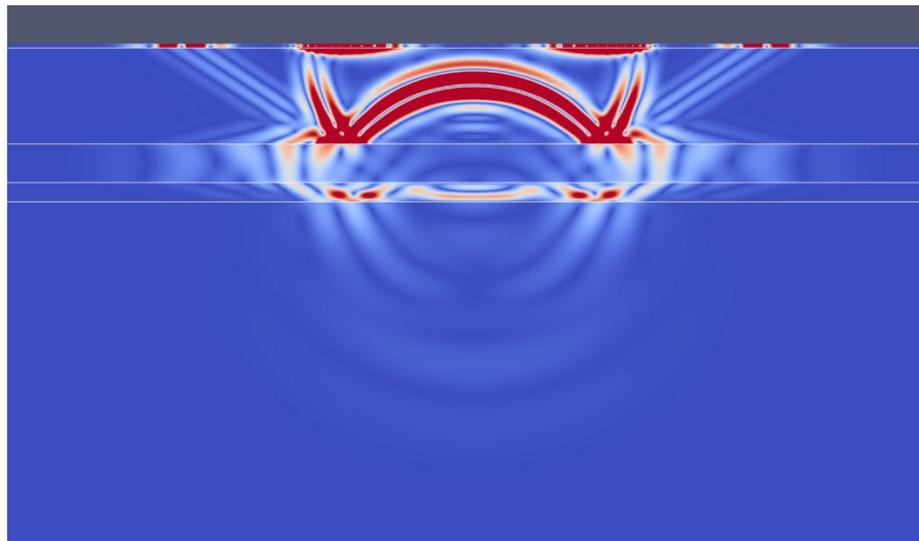
---

# Сейсмика – донные станции

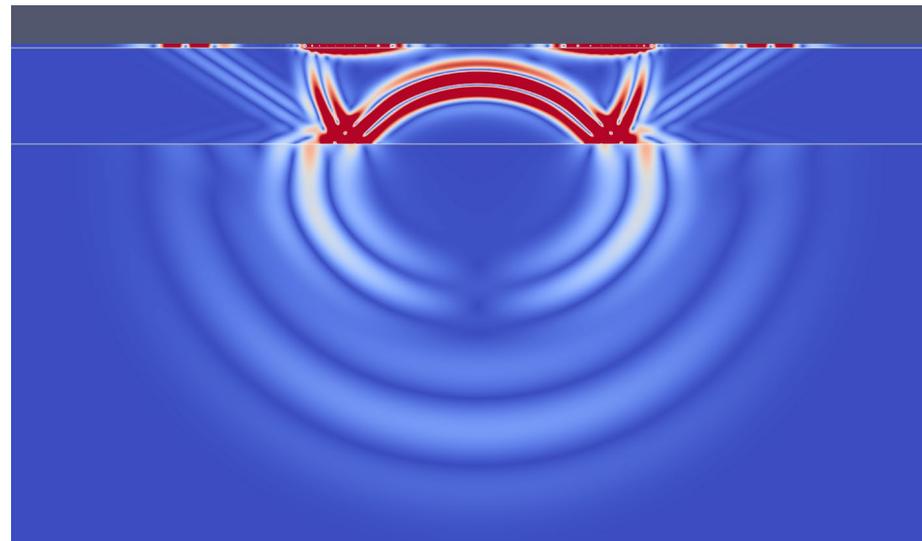


- 3D/4C
- Высокая стоимость
- Высокая информативность данных

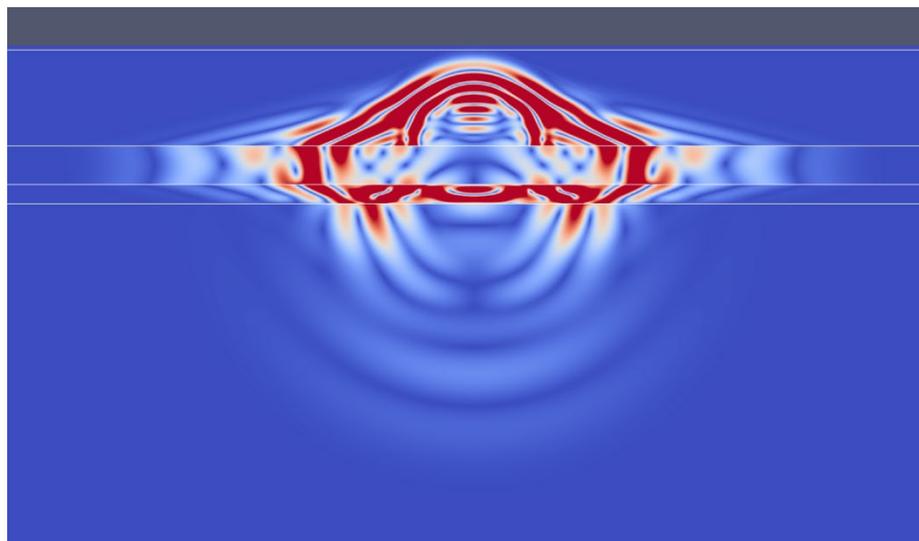
# Волновые картины



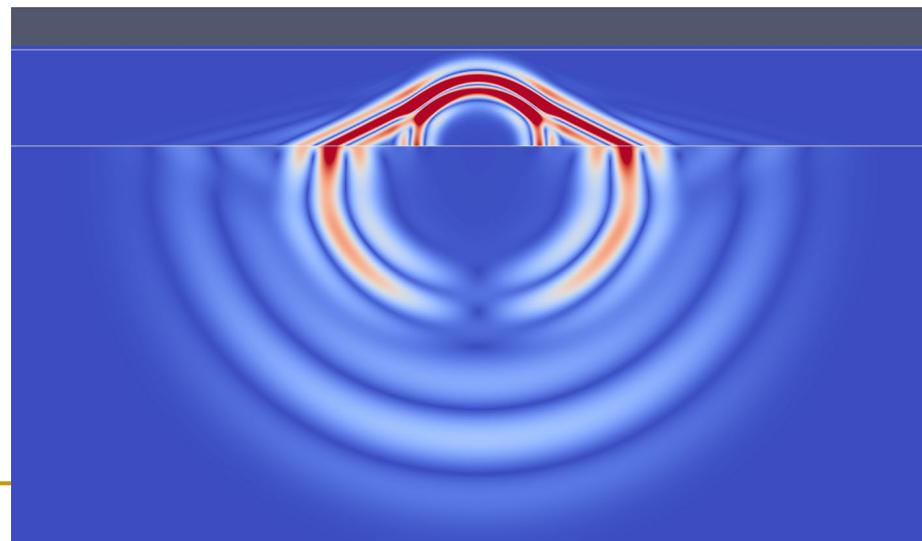
Источник во льду, 0.135 сек.



Источник во льду, без резервуара, 0.135 сек.

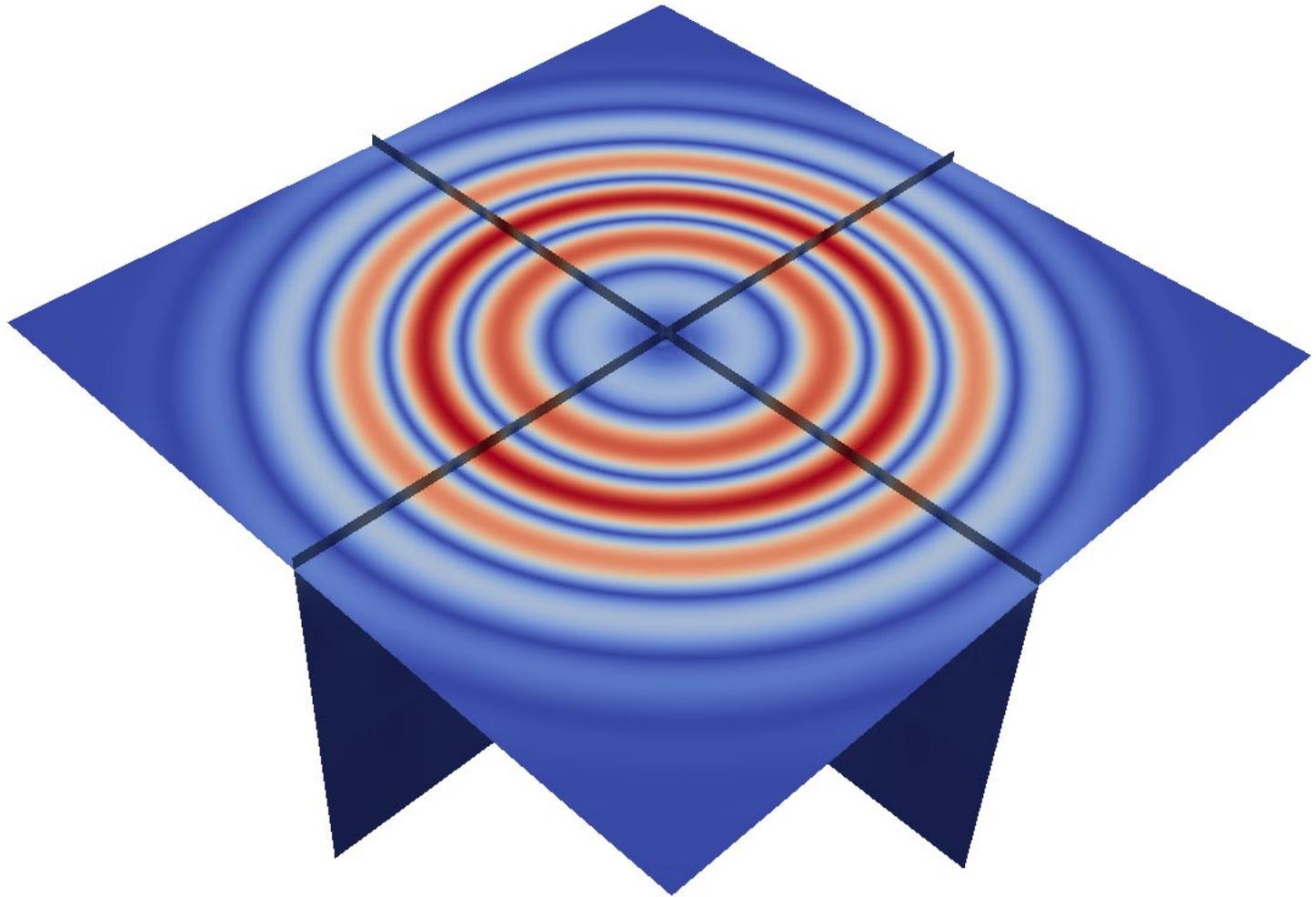


Источник на дне, 0.0675 сек.

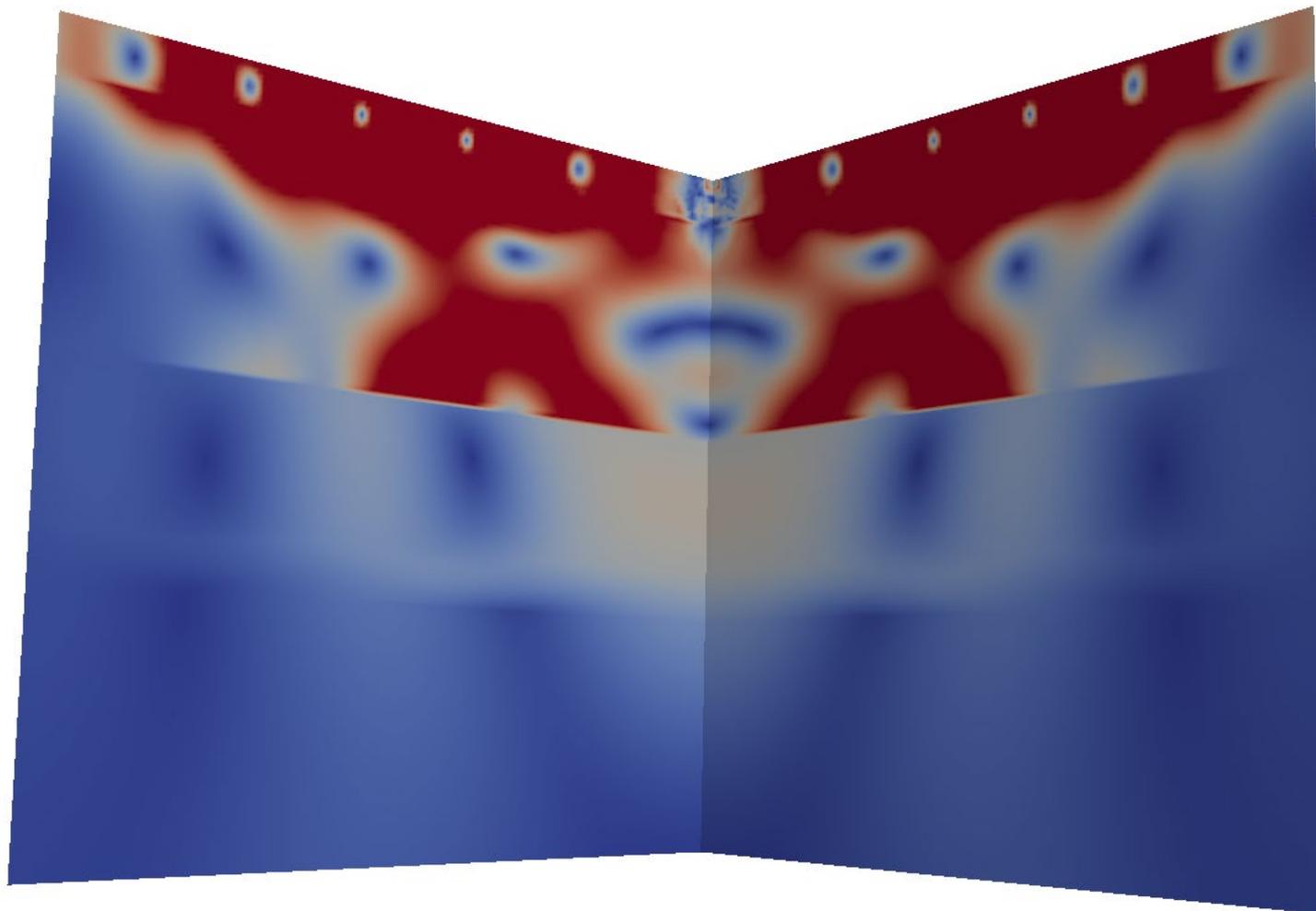


Источник в воде, без резервуара, 0.0675 сек.

# Волновая картина в слое льда



# Сейсмическая разведка Арктического шельфа



---

# Численное моделирование КОМПОЗИТНЫХ материалов

---

# Моделирование структуры (матрицы и волокон)

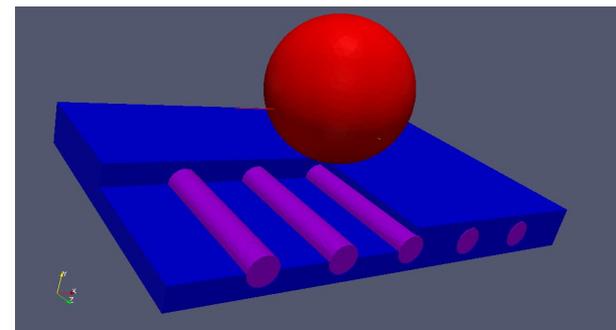
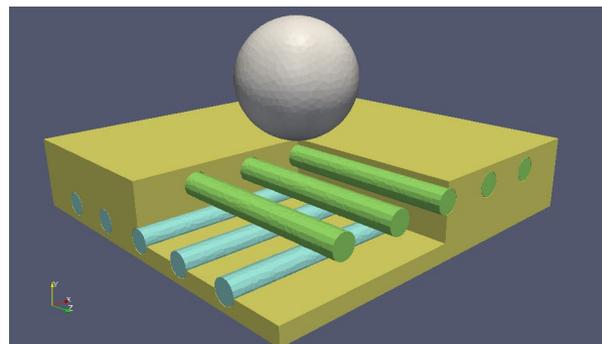
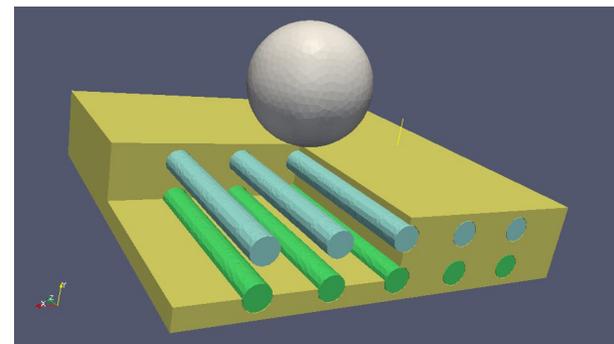
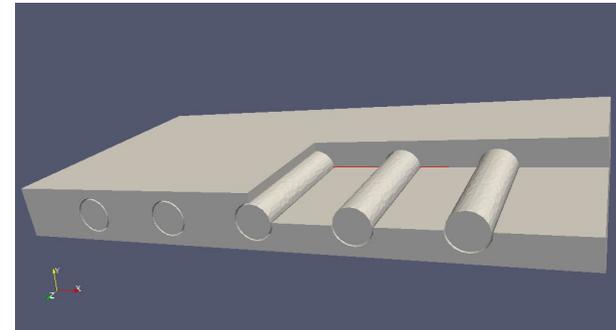
- ❑ Начальные условия — напряжения отсутствуют, конструкция покоится.
- ❑ Граничные условия — свободная граница.
- ❑ Контактные условия — трение между ударником и конструкцией,  $k=0.1$ .
- ❑ Внутренние границы — полное сцепление с возможностью разрушения.
- ❑ Энергия удара — 1.25, 12.5 и 125 Дж.

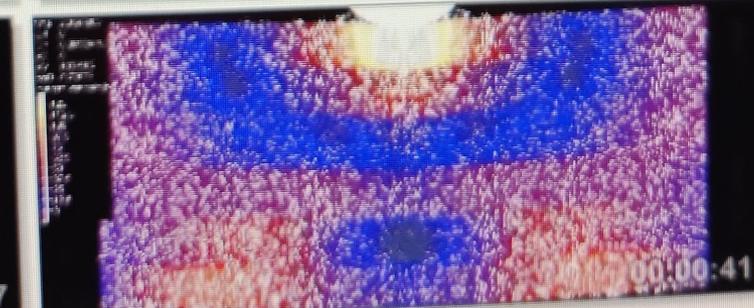
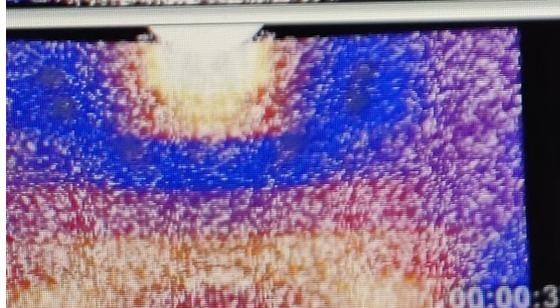
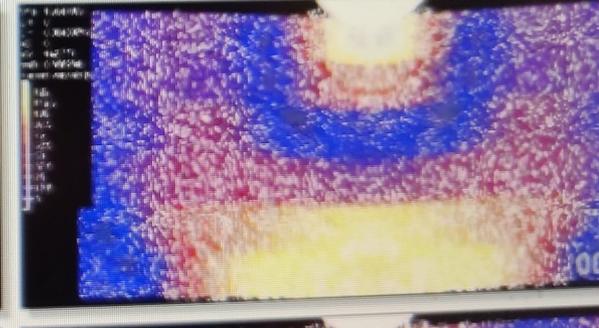
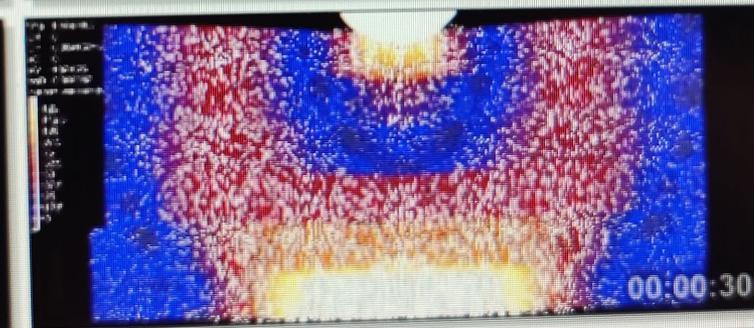
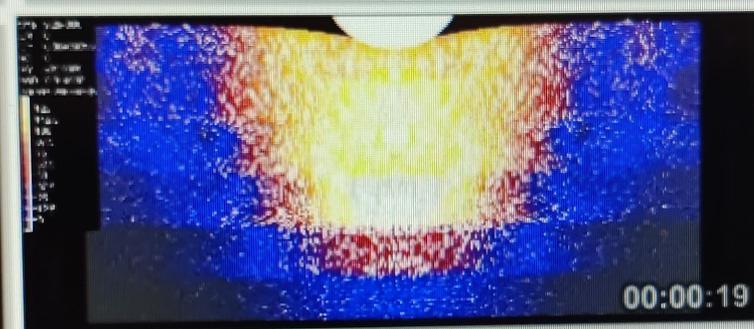
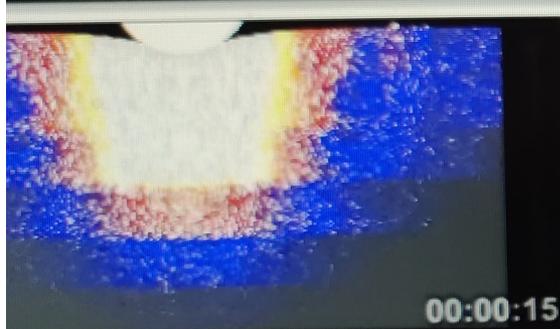
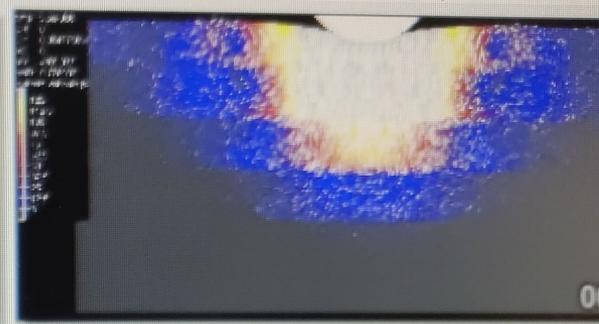
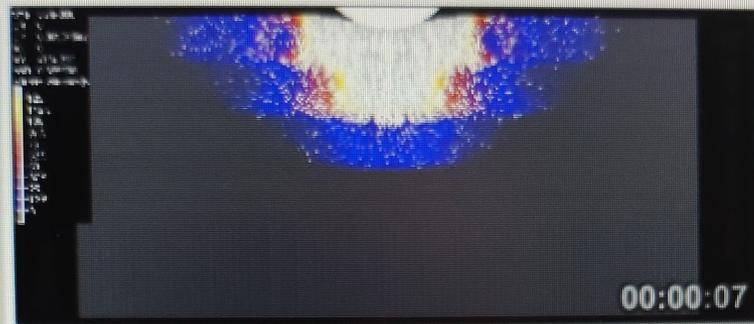
Один слой волокон:

- ❑ а. реальные параметры материала;
- ❑ б. однородный материал.

Два слоя волокон:

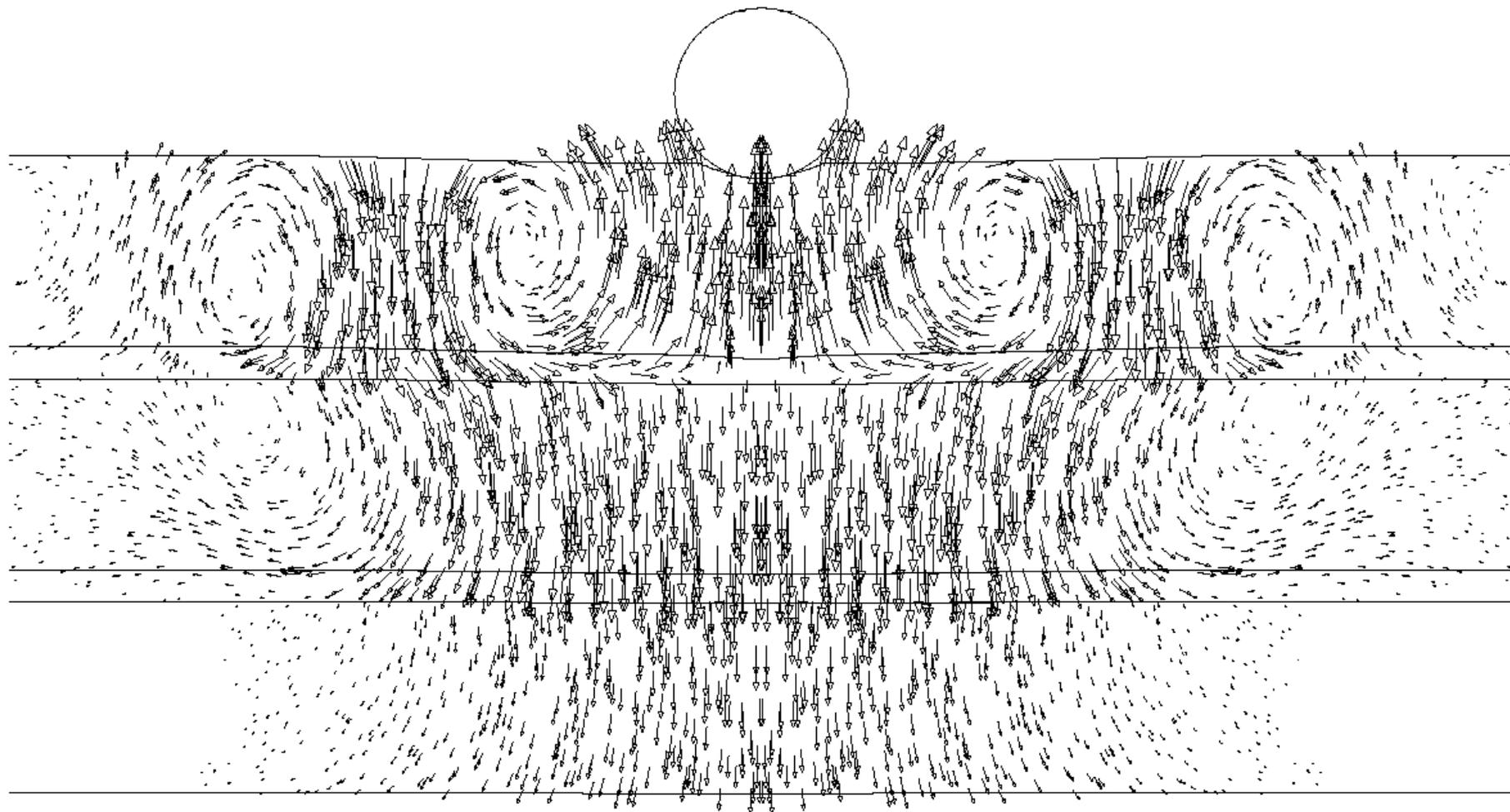
- ❑ а. параллельные слои;
- ❑ б. скрещенные слои.

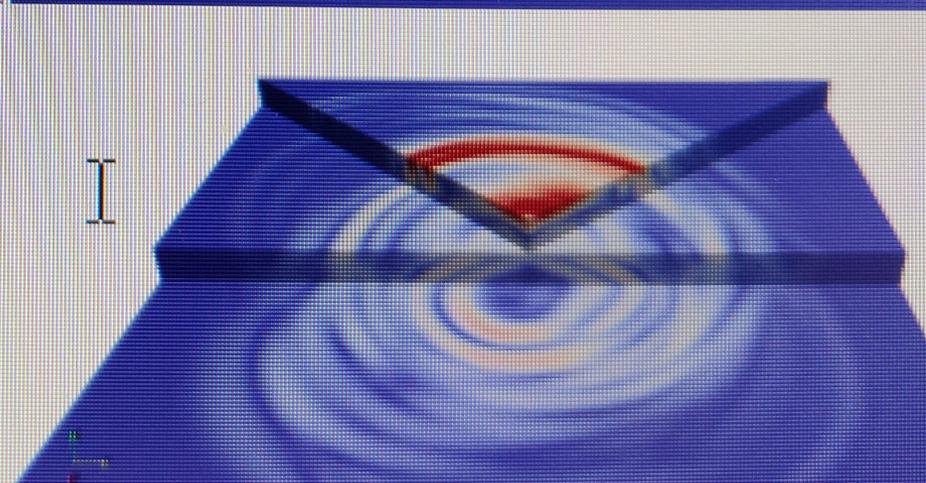
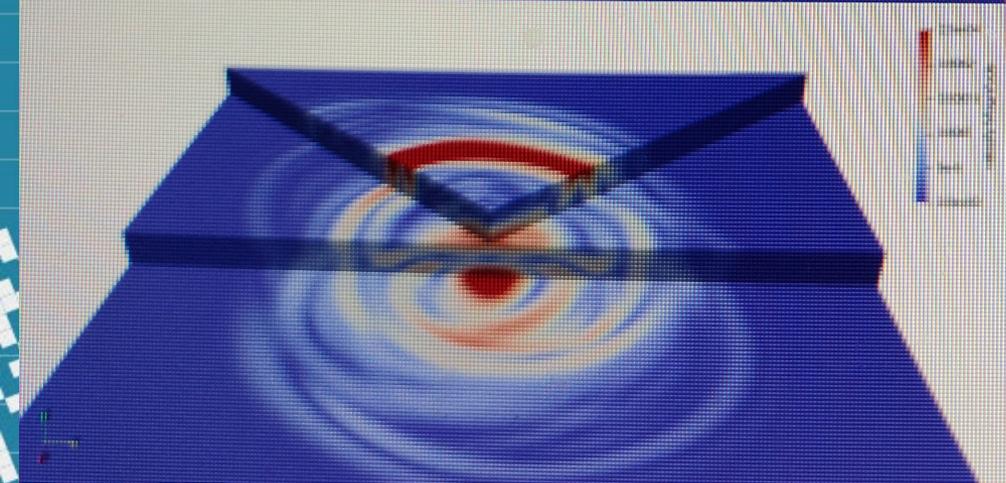
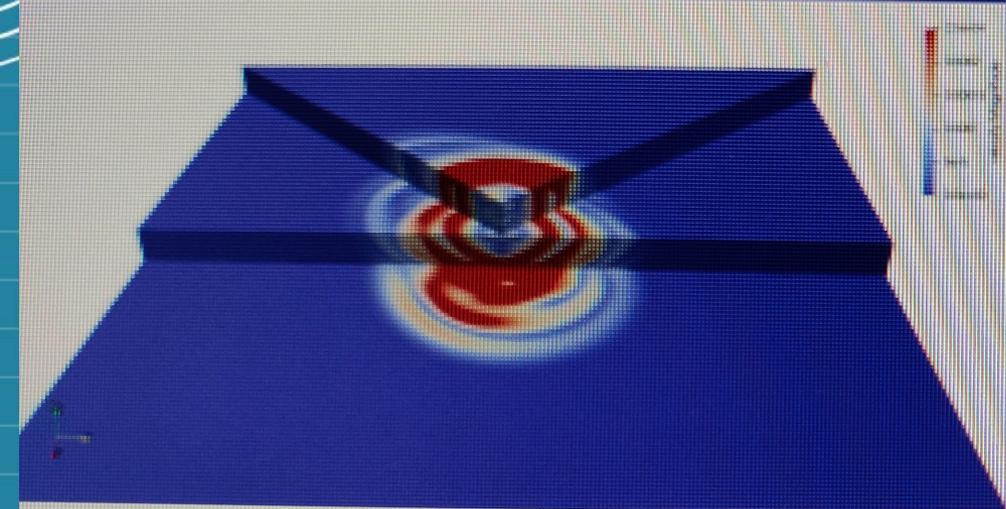




# Столкновение с многослойными

прогрессами





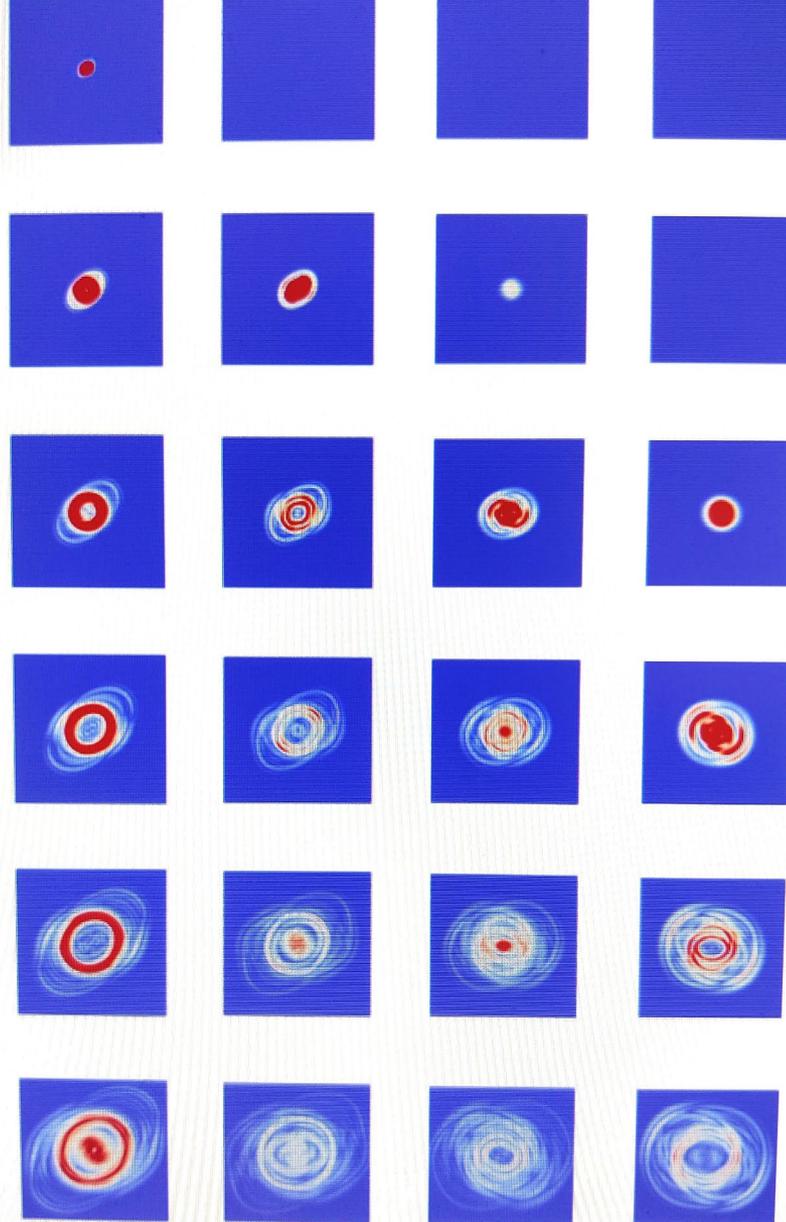
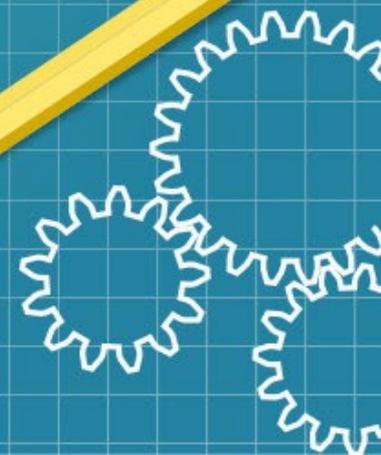
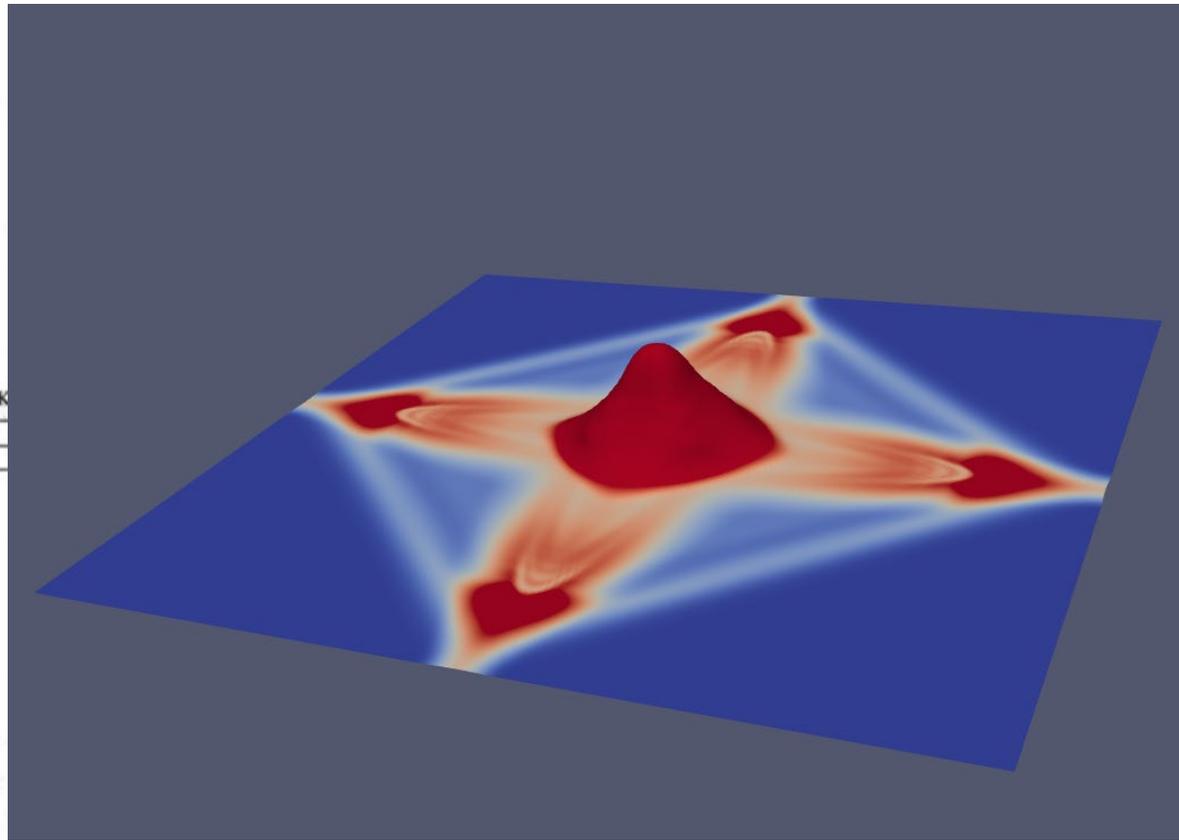
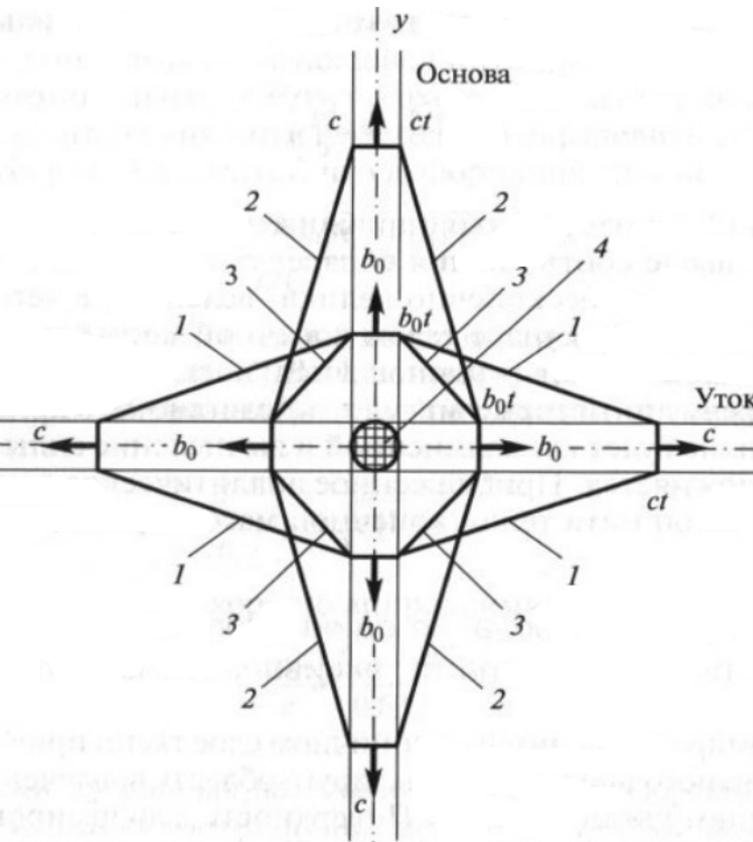


Рис. 2: Картина волн в образце. Цветом показан модуль скорости. Первый столбец - верхняя поверхность 1-го слоя. Второй столбец - верхняя поверхность 2-го слоя. Третий столбец - верхняя поверхность 3-го слоя. Четвёртый столбец - нижняя поверхность 3-го слоя. Сверху вниз - картина в разные моменты времени (шаги по времени 10, 30, 50, 70, 90, 110).

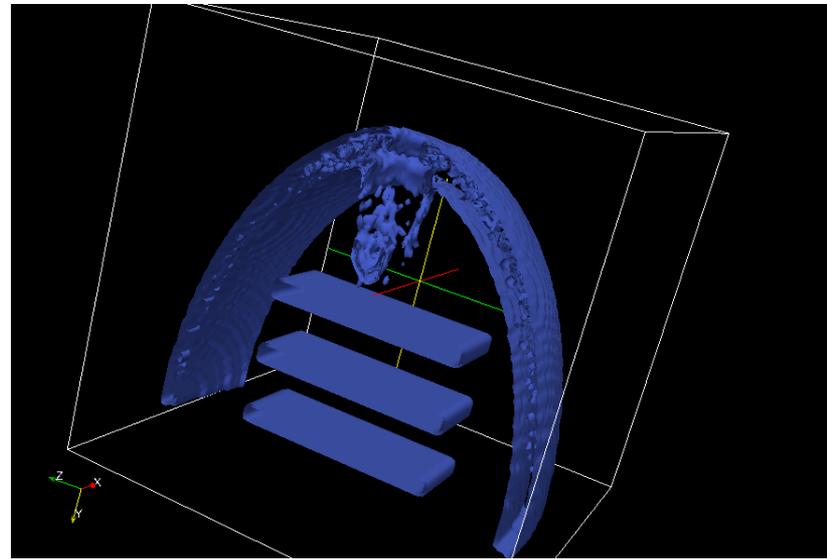
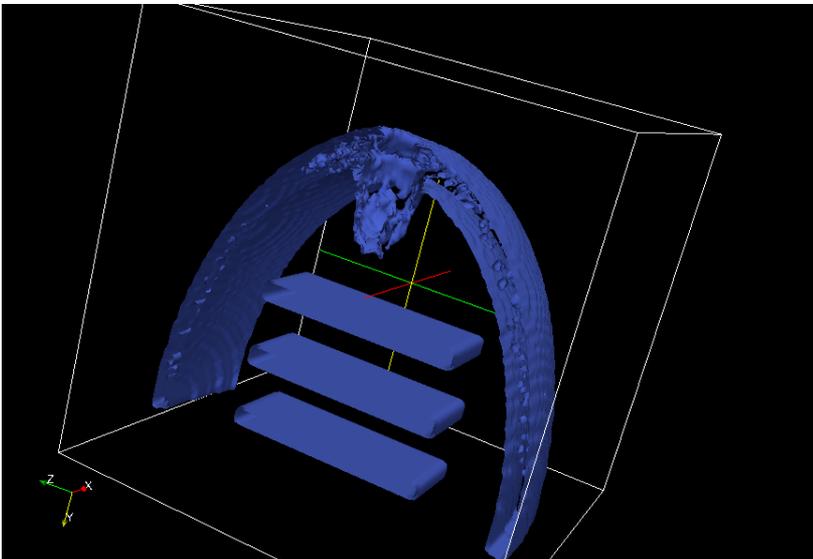
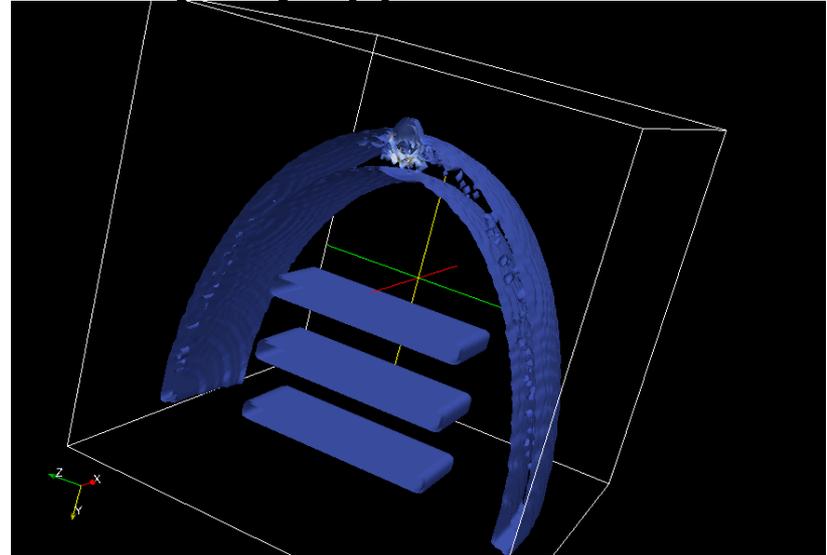
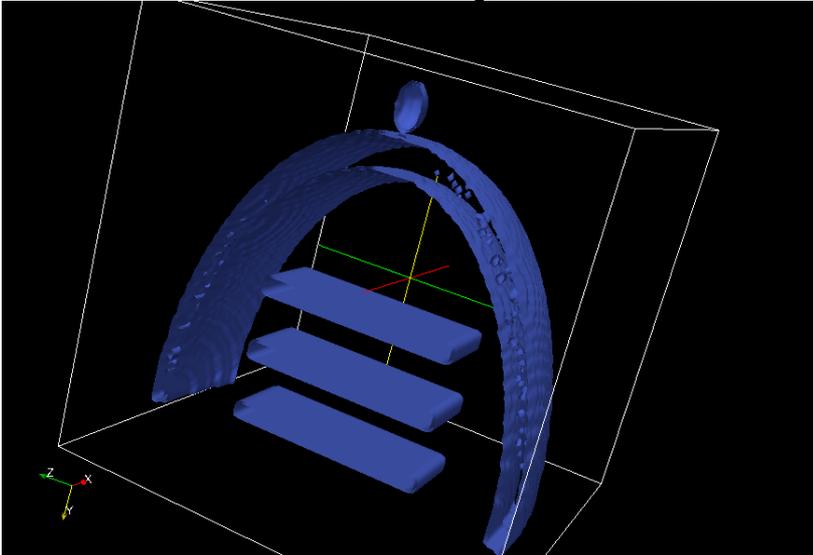


# Kevlar destruction

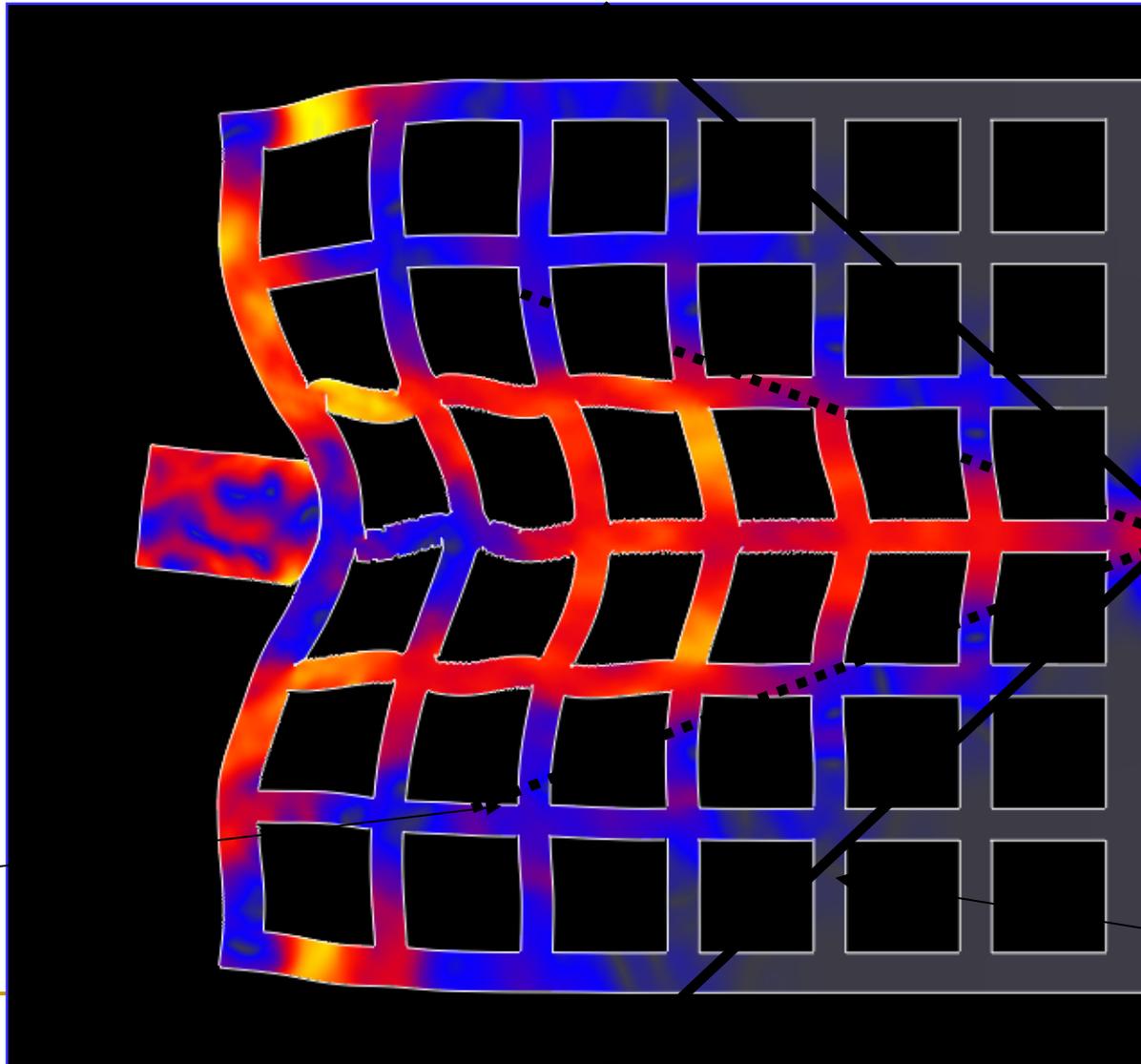
- “cross-bell” interaction model;
- shearless membrane.



# Результаты численного эксперимента: соударение микрометеорита с двухслойной полусферической оболочкой и разнесенными преградами



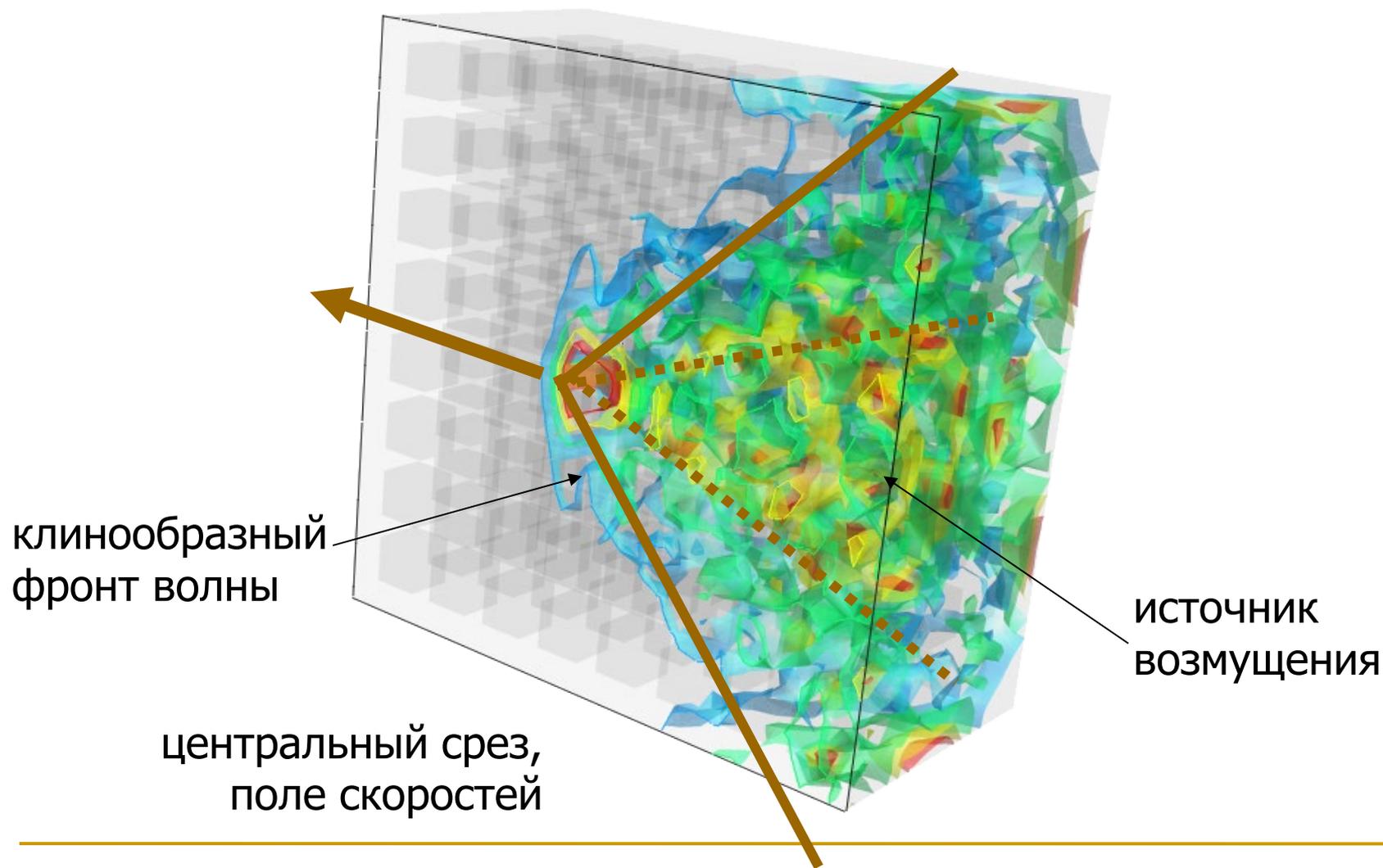
# Задача о соударении с перфорированной конструкцией

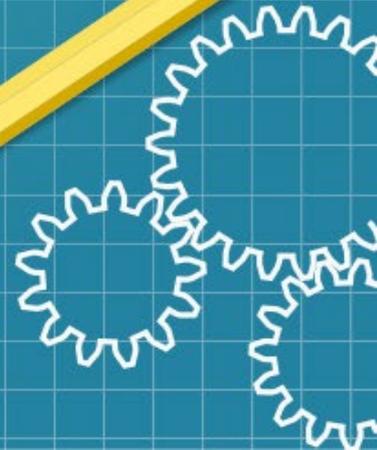
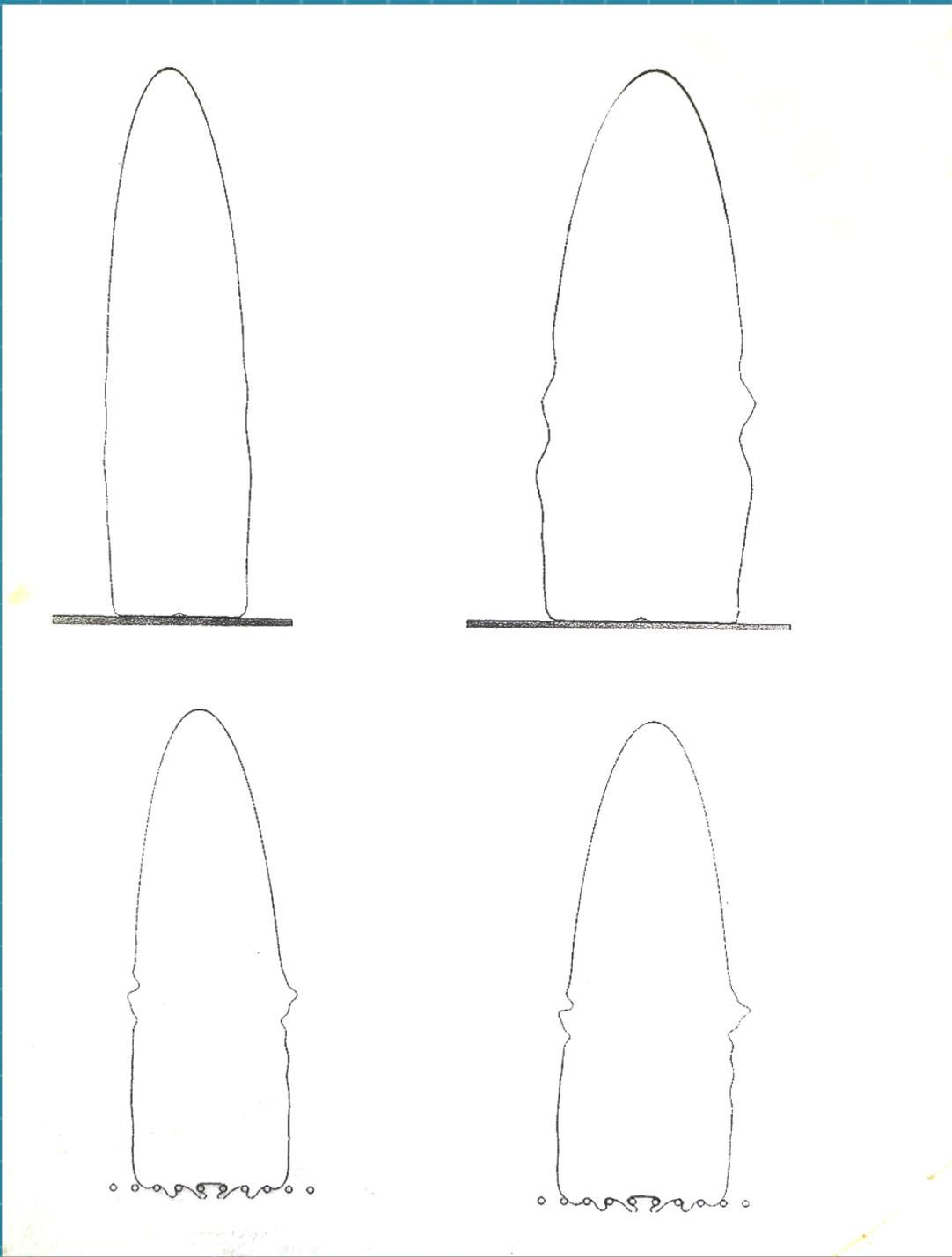
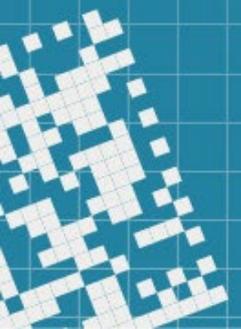


Клин  
основной  
энергии  
удара

Клин  
волнового  
фронта

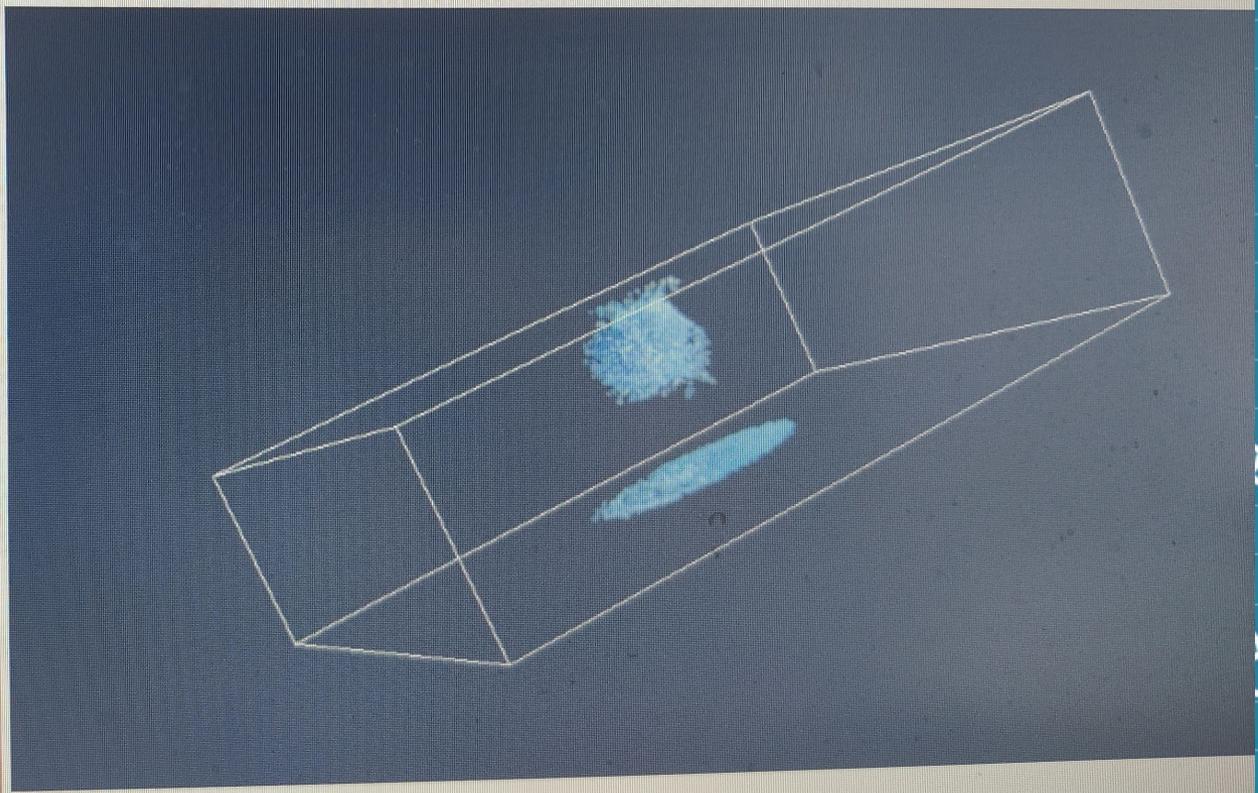
# Перфорированная среда (3D)





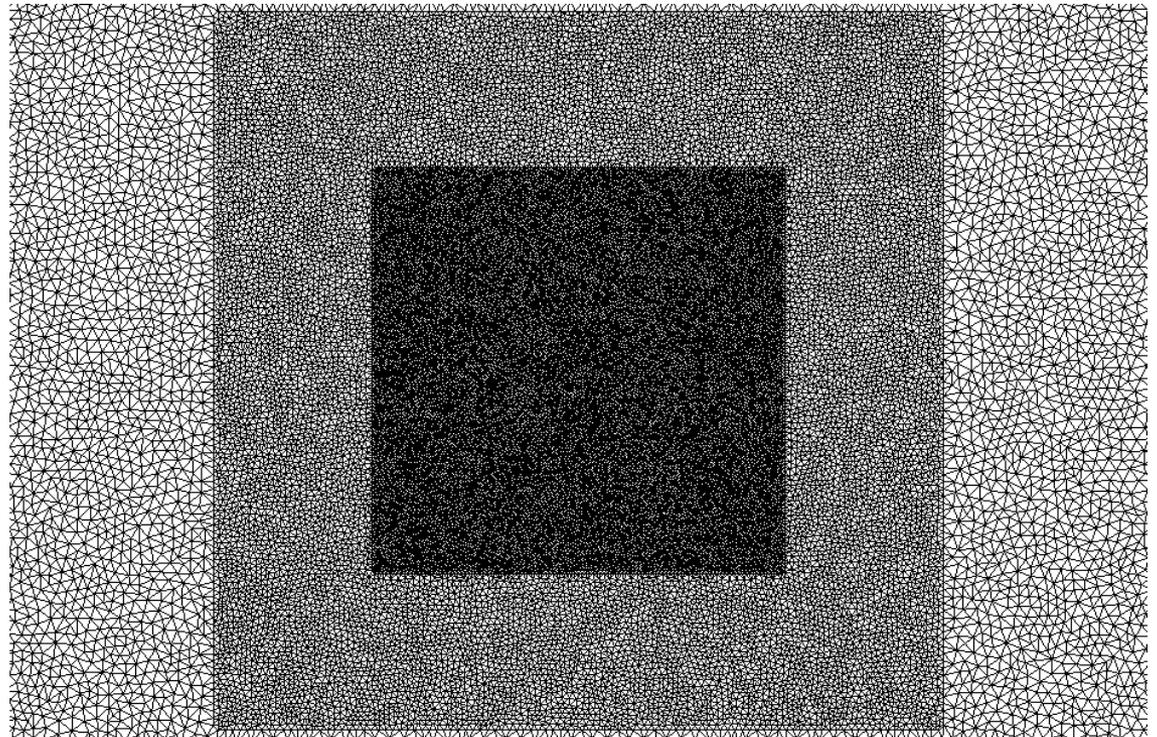
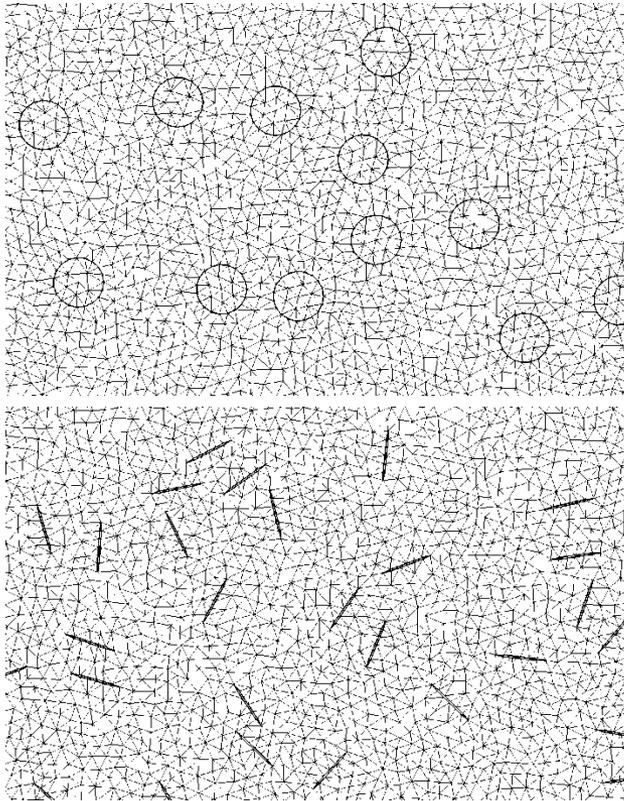
# Glass failure after a short laser pulse

New method of the polymeric material properties experimental investigation under powerful energy flux impact / B.A. Demidov, V.P. Efremov, Yu.G. Kalinin et al. // Proceedings of XXX International Conference on Interaction of Intense Energy Flux with Matter. – Journal of Physics: Conference Series (JPCS), 2015.

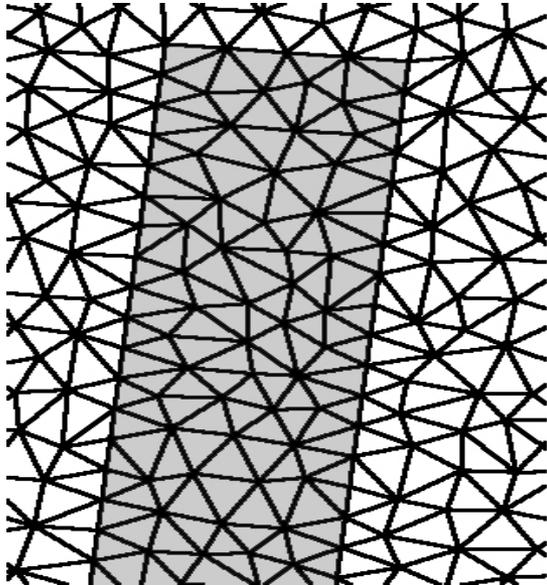


# Расчетная сетка

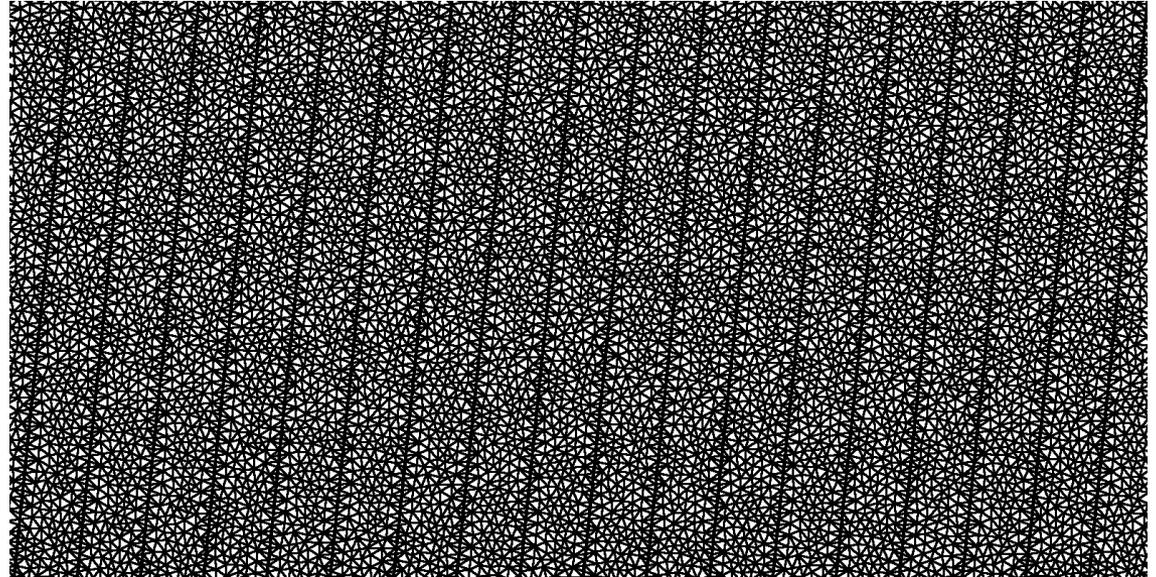
- Тетраэдральная сетка
- Сетки с меняющейся триангуляцией



# Моделирование мегатрещины



**Осреднённая  
модель**



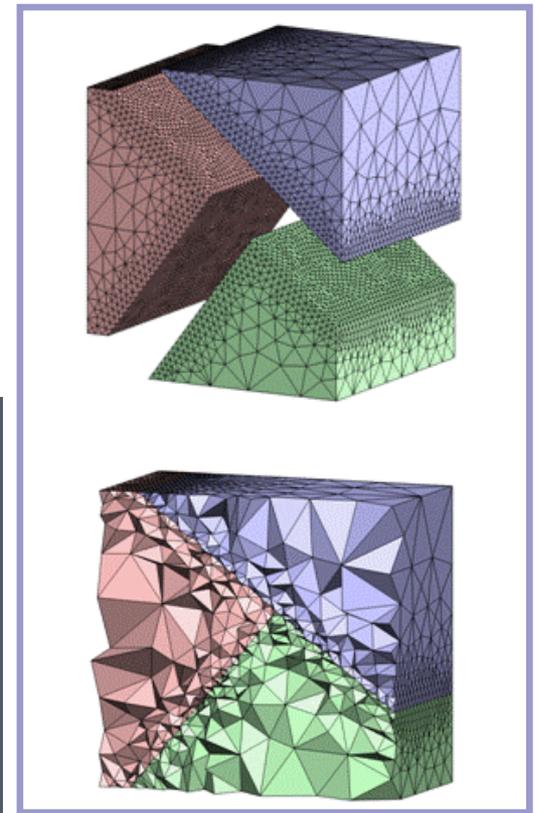
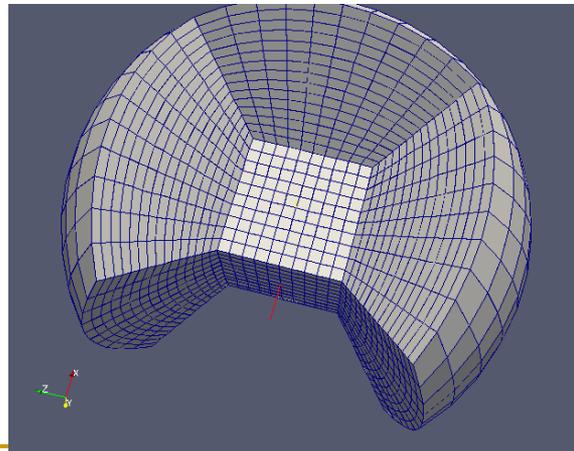
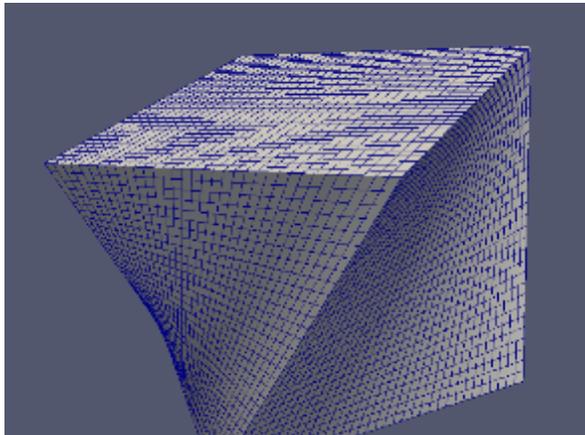
**Набор параллельных тонких трещин**

---

**Длина прямоугольника 200 м, ширина 10 м**

# Grids

- Curvilinear grids
- Tetrahedral grids



# Определяющие уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{yz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

1 - Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

2 - Реологические соотношения

Параметры модели:

$\rho$  – плотность среды

$\lambda, \mu$  – упругие параметры Ламе

$v$  – вектор скорости

$T$  – тензор напряжений

# Rheology

- Linear elasticity:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = 0.$$

- Viscosity (Maxwell model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{\tau_0}.$$

- Elastoplastic material (Prandtl-Reiss model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{I \mu \sigma_{ij} \sigma_{kl}}{K^2},$$

$$F_{ij} = 0.$$

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2 < 2K^2 \\ 1, & \text{если } S \geq 2K^2. \end{cases}$$

# Anisotropy

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = F(x, y, z, t)$$

$$\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$$

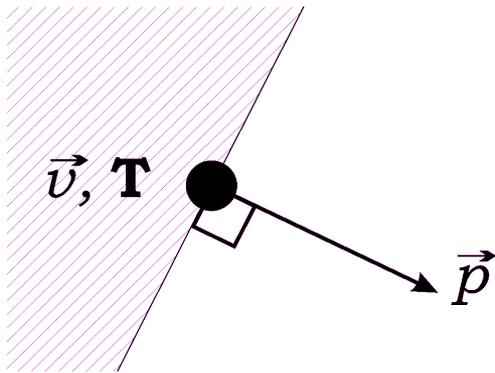
$$2q_{ijkl} = c_{ik} \delta_{ij} \delta_{kl} + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{m+3, n+3} |\varepsilon_{mij}| |\varepsilon_{nkl}| +$$

$$+ \sum_{m=1}^3 c_{i, m+3} \delta_{ij} |\varepsilon_{mkl}| + \sum_{m=1}^3 c_{m+3, k} |\varepsilon_{mij}| \delta_{kl}$$

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}$$

# Граничные и контактные условия

Внешняя граница



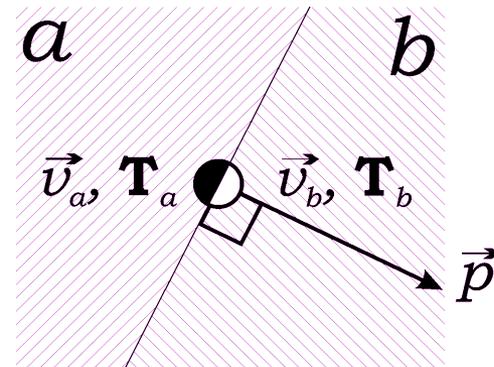
- Внешняя сила  
 $\sigma \vec{p} = \vec{f}$

- Скорость на поверхности

$$\vec{v} = \vec{V}$$

- Смешанные граничные условия
- Неотражающие граничные условия

Контактные границы



Условие сцепления

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b = \vec{V}, \vec{\sigma}_a = -\vec{\sigma}_b$$

Условие скольжения

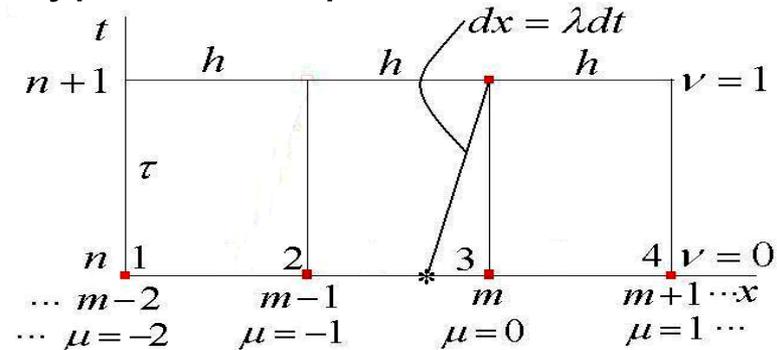
$$\vec{v}_a \cdot \vec{p} = \vec{v}_b \cdot \vec{p}, \sigma_p^a = -\sigma_p^b, \sigma_\tau^a = \sigma_\tau^b = 0$$

Контакт между жидкостью и твердым телом

# Uniform linear transport equation

- Let's start our discussion from the simplest hyperbolic equation

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, & \lambda = \text{constant} > 0 \\ u(0, x) = u^0(x), & u(t, 0) = u^1(t) \end{cases}$$



- Its solution at an arbitrary point is

$$\begin{cases} u(t, x) = u^0(x - \lambda t) = u_*, & \text{if } x - \lambda t \geq 0 \\ u(t, x) = u^1(t - x / \lambda) = u_*, & \text{if } x - \lambda t < 0 \end{cases}$$

- Thus,  $u(t, x) = u_*$  is the constant along the characteristic:

$$dx = \lambda dt$$

- There are a lot of the difference schemes for this equation which can be written in the common form:

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu}, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad \nu = 1, 0, -1, \dots,$$

# Approximation conditions and monotonicity

- For all difference schemes:

- We can write the approximation conditions ( $\sigma = \lambda\tau/h > 0$ ):

1<sup>st</sup> order  $\sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) = 1, \quad \sum_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma) \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) = -\sigma$

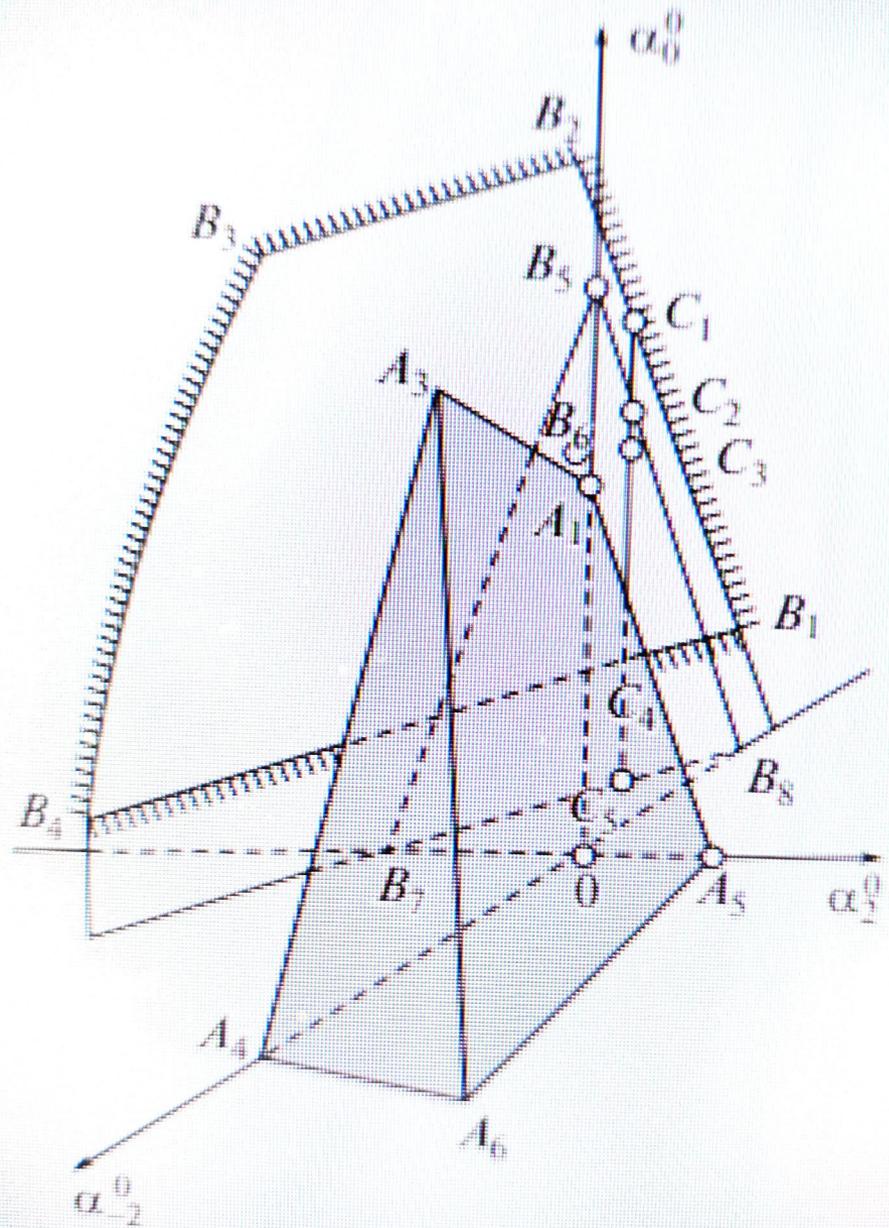
and higher  $\sum_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma)^k \alpha_{\mu}^{\nu} = -(-\sigma)^k, \quad k = 2, 3, \dots$

- There are a lot of monotonicity criteria:

Friedrichs  $\alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) \geq 0$

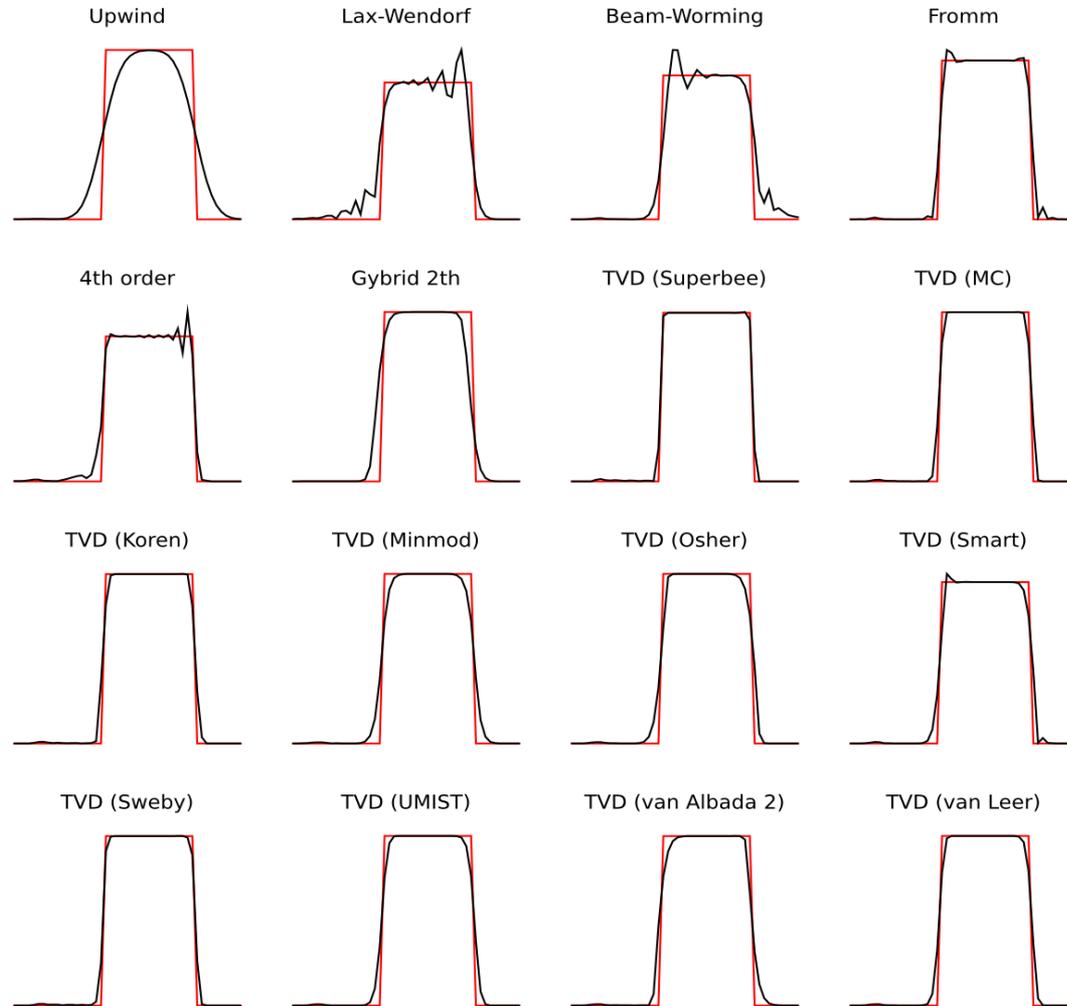
Harten  $TV(u^{n+1}) = \sum_m |u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}| \leq \sum_m |u_{m+1}^n - u_m^n| = TV(u^n)$

Van Leer  $\begin{cases} \min\{u_m^n, u_{m-1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max\{u_m^n, u_{m-1}^n\}, & \text{if } 0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1 \\ \min\{u_m^n, u_{m+1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max\{u_m^n, u_{m+1}^n\}, & \text{if } -1 < \sigma = \lambda\tau/h < 0 \end{cases}$



2. Space of indefinite ...

# Тестовые расчёты (одномерная задача)





Спасибо за внимание!